ANÁLISE DE REDES

Luiz Antonio Nogueira Lorena
lorena@lac.inpe.br
LAC - Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada
INPE - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

1. INTRODUÇÃO

A análise espacial apresenta várias aplicações quando podem ser identificadas redes para apoio e definição de problemas. As redes são entidades formadas por pontos (*nós ou vértices*) e linhas (*arcos ou arestas*) que descrevem de maneira natural vias públicas, conexões de água, telefonia, e outros. As redes para modelos urbanos descrevem em geral ruas, avenidas e suas interseções (cruzamentos).

São vários os problemas que podem ser modelados em redes. O conceito espacial de distância é usado, combinado com informações de demandas e capacidades de serviços. Podemos dividir e classificar os problemas como de localização e os relacionados a transportes.

Neste capítulo serão descritos alguns problemas importantes que podem ser definidos em redes e usam o aspecto da distribuição espacial dos dados. O maior enfoque será dado aos problemas de localização de facilidades. A maioria dos problemas tratados é considerada de difícil solução, alguns pertencentes à classe NP-hard.

Os problemas de localização estão divididos em problemas de cobertura e o problema de localização de medianas. Além desses são discutidos alguns problemas relacionados ao roteamento de veículos. Também será apresentado um algoritmo eficiente de *localização-alocação* alternadas para os problemas de localização e que pode ser aplicado também a problemas de roteamento de veículos. Este algoritmo simples encontra soluções de qualidade a problemas de *clustering* (no caso os de localização e roteamento).

No que segue, serão descritos os problemas de localização, roteamento e a heurística (algoritmo) de *localização-alocação*. Algumas considerações finais são apresentadas.

2. PROBLEMAS BÁSICOS

Inicialmente vamos recordar um conceito importante para a modelagem de problemas em redes. Este é o conceito de caminho mínimo entre dois pontos na rede.

Por exemplo, na rede representada na *figura 1*, os vértices podem representar centros de população e interseções de ruas ou avenidas em uma rede urbana, ou pontos de demanda e interseções de rodovias em um mapa de cidades. As arestas são usadas para representar ruas ou segmentos de rodovias. Uma avenida importante pode ser representada por várias arestas.

Podem existir vários caminhos entre pares de vértices, que passem pelas arestas (soma dos valores que aparecem nas arestas). Entre os pontos A e C está claro que o menor caminho vale 1, mas começa a ficar difícil decidir o menor caminho entre B e J, devido ao grande número de opções. Existem vários algoritmos que podem ser usados para responder esta questão. Um dos mais antigos e fundamental é conhecido com o algoritmo de Dijkstra [19]. Algoritmos mais rápidos existem e podem ser encontrados em vários livros de otimização (veja, por exemplo [10]).

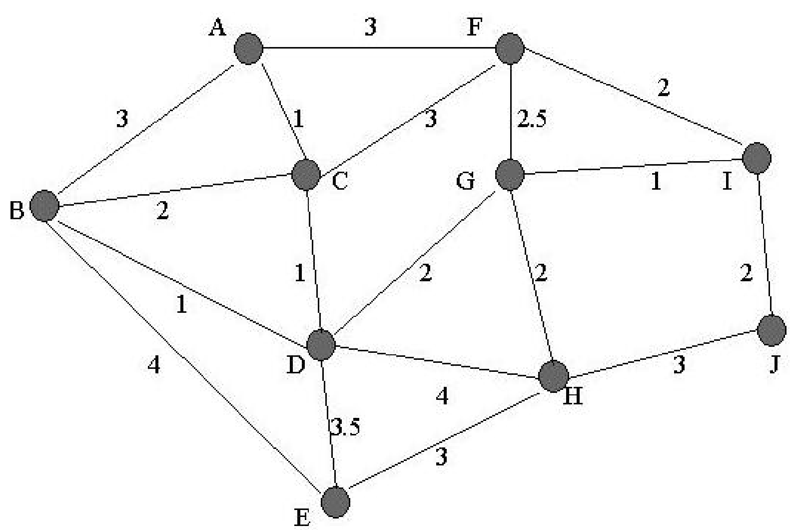


Figura 1: Uma rede inicial

Para alguns casos desejamos encontrar a matriz de distâncias de caminhos mínimos entre cada vértice e todos os outros vértices da rede. O algoritmo de Floyd [19] constrói esta matriz. Este e outros algoritmos de redes, que são eficientes do ponto de vista computacional (por exemplo, o de encontrar uma árvore geradora de peso mínimo), podem ser consultados nos livros [8, 10, 19], e portanto não serão descritos neste capítulo. Para os problemas de localização e roteamento que serão descritos a seguir, não encontramos tais algoritmos eficientes. Quanto maior o problema (entrada de dados) o tempo para resolve-los pode se tornar exponencialmente maior. Mais adiante estaremos sugerindo uma heurística simples para uma classe de problemas de localização que podem ser considerados como problemas de *clustering*.

3. PROBLEMAS DE LOCALIZAÇÃO

Problemas de localização tratam de decisões sobre onde localizar facilidades, considerando clientes que devem ser servidos, de forma a otimizar um certo critério. O termo "facilidades" pode ser substituído por fábricas, depósitos, escolas, etc., enquanto que clientes se referem a depósitos, unidades de vendas, estudantes, etc. Em geral os vários centros selecionados que podem ser localizados, podem também ser alocados ao subconjunto de centros que serão abertos. Desta forma também são conhecidos como problemas de *localização-alocação*, devido ao processo de alocação dos outros centros aos centros abertos.

Esta é uma área que têm despertado crescente interesse em planejadores, principalmente quando uma base de dados geograficamente referenciada pode ser usada. Departamentos de Geografia de diversas universidades vêm mantendo grupos de pesquisadores com preocupações em problemas de localização. Professores e pesquisadores formaram dois principais grupos de pesquisa e divulgação, o *EURO Working Group on Locational Analysis* e o *Section on Location Analysis - SOLA*, uma sessão do *INFORMS*. Ambos promovem reuniões anuais, na forma de congressos, onde são discutidas aplicações e desenvolvimentos relacionados a problemas de localização.

As aplicações são em geral divididas para setores públicos e privados. No caso de setores públicos aplicações maximizam a satisfação dos clientes em detrimento dos custos necessários para o alcance de tal objetivo (em geral os custos não são estimados com exatidão). Entre os exemplos de aplicações em setores públicos, estão, a localização de escolas, de postos de saúde, corpo de bombeiros, ambulâncias, viaturas de polícia, pontos de ônibus, entre outros. No caso do setor privado, custos chamados fixos estão envolvidos, e suas aplicações envolvem em geral fábricas, depósitos, torres de transmissão, lojas de franquias, etc.

3.1 PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO COM COBERTURAS

Na sua forma mais geral, o problema de localização de facilidades consiste na escolha de locais para instalar um certo número de facilidades (servidores) que atendam um conjunto de clientes (pontos de demanda) distribuídos em um espaço geográfico, e determinar a alocação dos clientes entre as facilidades. Um exemplo conhecido na literatura é o problema de cobertura [12, 13].

Vamos iniciar com um exemplo para melhor explicar os conceitos e problemas envolvidos. Suponha que uma prefeitura deseja localizar ambulâncias para o atendimento emergencial de pessoas acidentadas, levando-se em conta um tempo máximo de atendimento.

Na formulação do problema existem muitos objetivos que podem ser considerados, e estes muitas vezes são conflitantes. Para o município o controle dos custos operacionais e de capital é de suma importância, porém, é também importante responder a um grande percentual de chamadas dentro de um limite aceitável de tempo. A resposta a chamadas aumentará com maior número de estações abertas, mas obviamente, será mais caro de implementar.

Pode-se ter:

a) Objetivo:	Minimizar o número de estações de ambulâncias abertas
Sujeito a:	Cobrir em determinado tempo de resposta a todas as partes da cidade.
b) Objetivo:	Maximizar a demanda que pode ser coberta em determinado tempo de resposta
Sujeito a:	Abrir um número especificado de estações.

Como medir a cobertura e como modelar matematicamente?

Inicialmente a população é agregada em zonas. Uma zona pode consistir de uma quadra ou quarteirão, ou conjuntos de quarteirões. A seguir os seguintes dados devem ser levantados:

- As posições candidatas para localização das estações:
  As posições candidatas são determinadas pela municipalidade em um estudo prévio. Vários critérios são usados, tais como: proximidade de grandes artérias, propriedade da terra, zoneamento, de estações de bombeiros que possa abrigar ambulâncias, etc.

- A demanda de cada zona:
  Pode ser estimada por dados históricos de chamadas de cada zona, ou pela população da zona, ou outra medida que substitua a demanda. Assume-se que a população está concentrada no centro da zona (zonas pequenas)

- O tempo de resposta entre estações de ambulâncias e zonas:
  Na avaliação de locais para localização de estações, os tempos de resposta da estação para várias partes da cidade deve ser calculado. O tempo do trajeto entre cada local e as zonas deve ser estimado antes do modelo ser implementado.
  Um algoritmo de caminho mínimo entre todos os pontos da rede pode fornecer subsídios para a estimativa deste tempo, levando em conta que o trajeto da ambulância em alguns períodos do dia pode ser dificultado (por exemplo, na saída de empregados do trabalho no final do dia).

Supondo n pontos possíveis de localização de ambulâncias, m pontos de demanda, as distâncias entre pontos d_{ij} , as demandas dos pontos f_i , e a distância crítica de atendimento d , então os modelos resultantes podem ser formulados matematicamente por:

a) Cobertura de conjuntos

$$Min \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1 ,\ i = 1,...,m$$

$$x_j \in \{0,1\} ,\ j = 1,...,n$$

onde $a_{ij} = \begin{cases} 1,\ se\, d_{ij} \leq d \\ 0,\ caso\ contr\acute{a}rio \end{cases}$

b) Máxima Cobertura [5]

$$Max \sum_{i=1}^{m} f_i y_i$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j \in N_i} x_j \geq y_i \ ,\ i = 1,...,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = p$$

$$x_j \in \{0,1\} ,\ j = 1,...,n$$

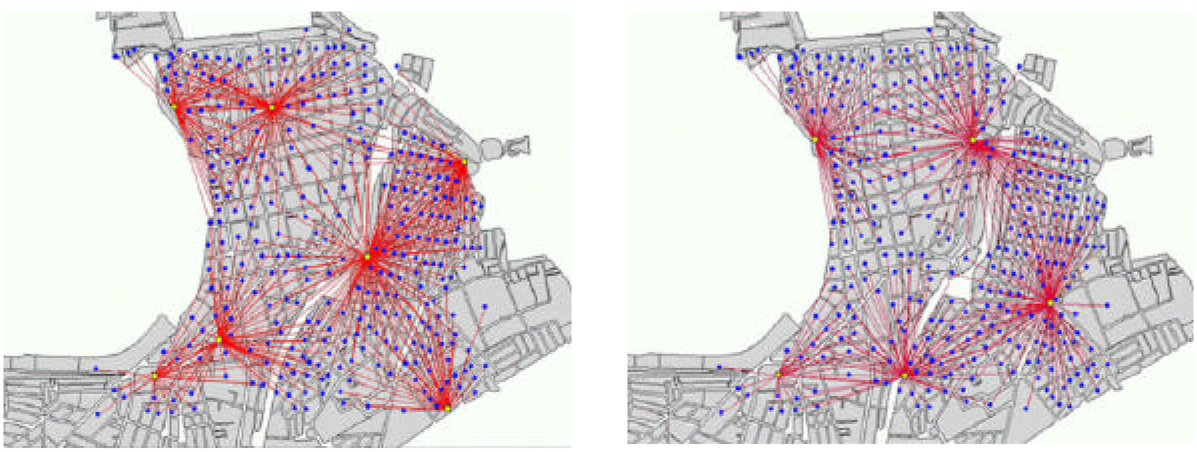
$$y_i \in \{0,1\} ,\ i = 1,...,m$$

onde $N_i = \{ j \,|\, d_{ij} \leq d \}$ é o conjunto de facilidades que estão a menos de uma distância crítica d do ponto de demanda i .

A *figura 2* mostra a aplicação de uma heurística de *localização-alocação* (descrita na *seção 5*) ao problema de máxima cobertura, onde estão sendo considerados os dados georeferenciados da região central de São José dos Campos (disponíveis em http://www.lac.inpe.br/~lorena/instancias.html). Um tema de pontos foi extraído, um ponto por quadra, com as respectivas demandas, calculadas com base no cadastro de imóveis existente nas quadras. A demanda será maior, conforme aumenta o número de imóveis nas quadras. Quadras vazias receberam a demanda unitária. A solução apresenta a localização de 3 antenas transmissoras para distribuição de serviço de *internet* via rádio, com raio de ação de 800 metros (o alcance das antenas não leva em conta as cotas dos terrenos e os obstáculos que estariam no raio de ação).

Figura 2: Solução de máxima cobertura para 3 antenas

A mesma situação poderia se refere à localização de ambulâncias. Neste caso as distâncias (entre pontos e a crítica) deveriam levar em conta o deslocamento sobre um tema de linhas e pontos (rede).



a) b)

Figura 3: Soluções do problema de cobertura de conjuntos

A *figura 3* mostra duas soluções possíveis para o problema de cobertura de conjuntos. Neste caso procura-se minimizar o número de centros abertos, mantendo a cobertura da totalidade dos pontos de demanda. Portanto, a solução representada em 3b) é melhor que a representada em 3a).

3.2 LOCALIZAÇÃO DE MEDIANAS

Vários problemas de localização referem-se a medianas. A busca de *p-medianas* em uma rede é um problema clássico de localização [15, 16, 27, 28]. O objetivo é localizar *p* facilidades ou recursos (medianas), de forma a minimizar a soma das distâncias de cada vértice à sua facilidade (ou algum recurso) mais próxima. Na rede, os arcos seriam as rodovias ou malha viária e os nós, locais onde as facilidades (escolas, silos, etc.) podem ser localizadas.

O problema das *p*-medianas pode ser formulado como um problema de programação inteira binária. Consideremos um grafo completo para uma dada instância, obtido através da aplicação do algoritmo de Floyd [8] e o conjunto de vértices indexados resultantes {1,...,n}.

O problema pode ser descrito matematicamente como segue:

c) p-medianas:

$$Min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1,...,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ii} = p$$

$$x_{ij} \le x_{ii},\ i, j = 1,...,n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\},\ i, j = 1,...,n$$

onde, cada vértice j é alocado a somente um vértice i, que deve ser uma mediana e o número exato de medianas a ser localizado deve ser p.

Algumas suposições são consideradas para a validade deste modelo, tais como;

1. Toda a demanda de um vértice é atendida por um único centro (mediana)
2. Todo ponto de demanda deve ser servido pelo centro mais próximo
3. Os vértices coincidem com os pontos de demanda
4. Não existem restrições de capacidade nos vértices
5. Os custos fixos de implementação não são considerados

Estas suposições podem não valer em diversas situações. Por exemplo, se compras forem feitas em três lojas diferentes (violando a suposição 1), ou não abastecer em um posto de gasolina que está em frente a residência para abastecer naquele que se encontra no caminho do trabalho (violando a suposição 2), ou deixar de visitar algum centro de venda por estar situado muito longe de casa (violando a suposição 3).

Na localização de novas fábricas, o modelo de p-medianas é um modelo de alto nível que somente proporciona uma idéia de em qual centro populacional as fábricas podem ser localizadas. A localização mais precisa deve ser acompanhada de um estudo aprofundado dos locais da cidade, baseados em zoneamento, custo da terra, rodovias, etc. Do mesmo modo no caso urbano, (por exemplo, na localização de escolas), vários outros fatores devem ser considerados, como acessibilidade, disponibilidade do terreno, etc.

O modelo de p-medianas é um dos modelos de localização mais populares da literatura. Foi aplicado várias vezes para localizar centros no setores públicos e privados. Conceitualmente, ele é muito simples, entretanto, possui um número muito grande de soluções, e não é sempre possível resolve-lo de forma ótima. Na *seção 5* será apresentada uma heurística simples e eficiente para aproximar (com qualidade) a solução ótima deste problema.

A *figura 4* mostra a localização de 3 medianas utilizando dados do centro da cidade de São José dos Campos (disponíveis em http://www.lac.inpe.br/~lorena/instancias.html). Os polígonos de fundo correspondem às quadras do centro da cidade. Os pontos sobrepostos são os nós de demanda considerados.

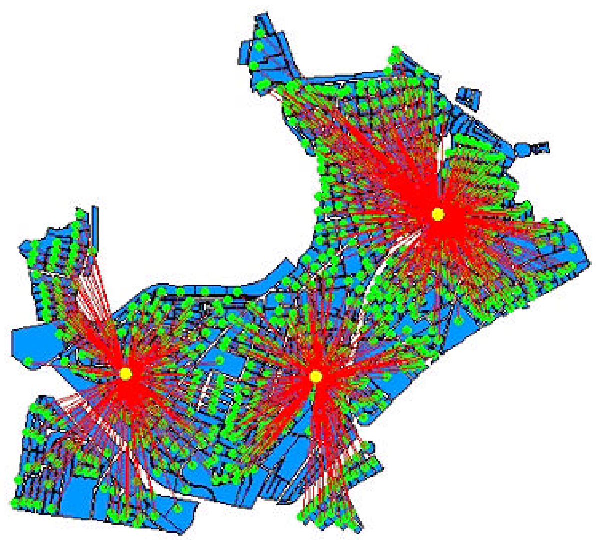


Figura 4: Localização de 3 medianas – distâncias euclidianas

Para o caso capacitado, substitui-se no modelo de p-medianas c), as restrições $x_{ij} \le x_{ii}, i, j = 1,...,n$ por:

$$\sum_{j=1}^{n} f_j x_{ij} \le b_i x_{ii}, \qquad i = 1,...,n,$$

onde:

- f_j é a demanda do nó j ;

- b_i é a capacidade de atendimento do nó i , se este for escolhido como centro (mediana).

As *figuras 5 e 6* mostram as soluções de um problema contendo 31 vértices, dos quais foram selecionados 3 para a instalação de facilidades. No primeiro caso considerou-se distâncias lineares e no segundo foram utilizadas distâncias calculadas sobre a rede que representa um subconjunto das ruas que compõem o centro da cidade de São José dos Campos. Como pode-se observar, existem diferenças entre as soluções dos dois estudos.

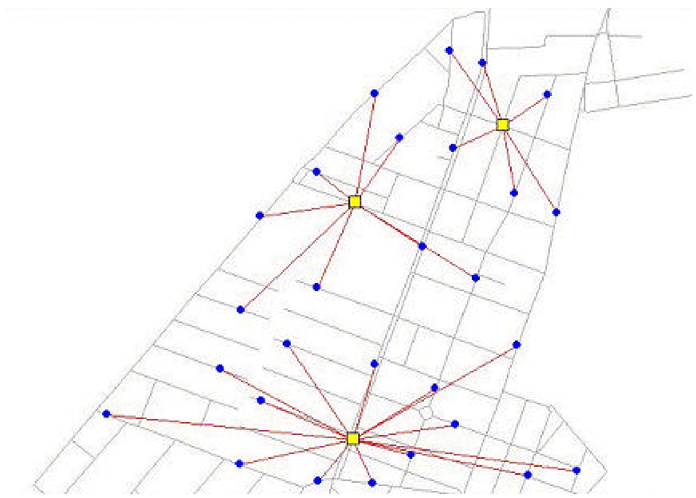


Figura 5: Localização de 3 medianas – caso capacitado – distâncias euclidianas

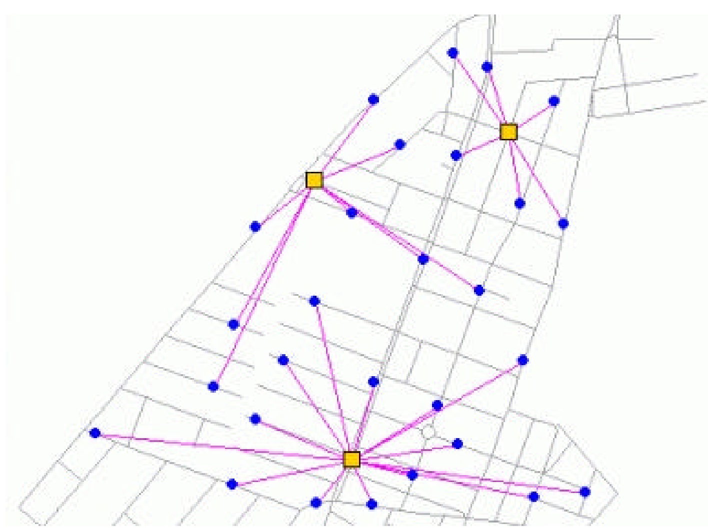


Figura 6: Localização de 3 medianas – caso capacitado – distâncias de rede

3.3 OUTROS MODELOS DE LOCALIZAÇÃO

Vários outros modelos de localização podem ser encontrados na literatura. Entre eles destacam-se:

- os modelos de competição: o produto que será distribuído nos locais a serem localizados já contam com produtos similares, distribuídos por concorrentes. Neste caso deseja-se entrar no mercado capturando a maior quantidade possível de demanda, considerando as instalações dos concorrentes,
- os modelos probabilísticos: o recurso localizado pode não estar disponível quando necessário, por exemplo, a ambulância localizada pode estar atendendo um outro chamado quando está sendo necessária em mais de um local ao mesmo tempo. Neste caso considera-se a possibilidade de uma ocorrência deste tipo de evento incluindo no modelo medidas de probabilidades. Também é possível considerar-se filas de atendimento, etc.
- modelos que combinam localização e roteamento: deseja-se localizar e ao mesmo tempo sequenciar uma série de tarefas.
- Modelos para materiais perigosos: Localizar, por exemplo, resíduos tóxicos. Neste caso deseja-se uma grande distância de aglomerados populacionais.

Uma técnica proposta por Hillsman [17] usa edição na formulação do problema das p-medianas, e consegue de forma aproximada tratar outros tipos de problemas de localização usando o modelo de p-medianas. Esta é uma idéia interessante para a integração de algoritmos de localização a Sistemas de Informações Geográficas (SIGs), pois em princípio bastaria ter-se um bom código para solução do problema de p-medianas. Entre os modelos possíveis estão:

- p-medianas com restrição de distância máxima: encontra a configuração que minimiza a distância total (com pesos) percorrida de cada ponto de demanda a seu centro aberto mais próximo, enquanto assegura que o máximo de pontos possível está entre uma dada distância de seu centro mais próximo.
- Maximização de atendimento: encontra a configuração que maximiza o atendimento (maximiza o número de pontos de demanda servidos), assumindo que desejo de atribuição de demanda a centros é linearmente proporcional à distância do centro.
- Minimização da distância total em potências: encontra a configuração que minimiza a distância total percorrida de cada ponto de demanda a seu centro aberto mais próximo, considerando distâncias individuais elevadas ao quadrado, ao cubo, ou alguma outra função de potência.
- Problema de Máxima Cobertura com restrição de distância máxima: encontra a configuração que maximiza o número de pontos de demanda que se encontram a uma dada distância de seu centro mais próximo. Uma restrição secundária de maior distância é aplicada para assegurar que pontos que não estão abaixo da primeira distância serão servidos se estão abaixo da segunda distância.

O uso de SIGs para ajudar na definição e solução de problemas de localização e roteamento ainda não está totalmente difundido na comunidade científica internacional. Mas, levando-se em conta a capacidade de armazenar, exibir e manipular dados espacialmente distribuídos, a integração de algoritmos de localização aos SIGs foi iniciada há alguns anos. A ESRI integrou alguns problemas não-capacitados de localização em seu Sistema de Informações Geográficas *ArcInfo* [11]. Recentemente com o desenvolvimento de dois projetos temáticos apoiados pela FAPESP [1, 2], foi iniciada a integração de algoritmos de localização e roteamento aos SIGs *ArcView* [11] e ao *SPRING* [30] (desenvolvido pelo INPE). Os algoritmos estão baseados em pesquisa recente, publicada em revistas internacionais especializadas [20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 29] e estão disponíveis na página do projeto (http://www.lac.inpe.br/~lorena/ArsigIndex.html) em forma de códigos integrados ao SIGs [1, 2].

4. ROTEAMENTO DE VEÍCULOS

Problemas de distribuição aparecem em uma série de serviços, como entrega bancária, entrega postal, entrega de mercadorias, rotas de ônibus escolar, coleta de lixo industrial, serviço de entrega noturnas, operações de frete, e outros. A solução destes problemas pode diminuir bastante o custo de distribuição, causando uma grande economia tanto para a indústria como para o governo. No entanto, muitos destes problemas são difíceis de resolver. Estes dois atrativos fazem com que existam muitos trabalhos disponíveis na literatura sobre estes problemas que são conhecidos como problemas de roteamento e planejamento (*scheduling*).

No problema clássico de roteamento de veículos, consideram-se m clientes espacialmente distribuídos, cada um com uma demanda de mercadorias. As mercadorias são entregues a partir de um depósito por uma frota de veículos homogêneos. Cada veículo realiza um percurso saindo do depósito e entregando as mercadorias para um subconjunto de clientes, satisfazendo as necessidades de demanda de cada um e retornando ao depósito. A rota de cada veículo deve obedecer a algumas restrições como: a quantidade de mercadoria entregue não deve exceder a capacidade do veículo e o tempo limite para realizar uma rota não deve ser ultrapassado. O problema de roteamento de veículos pretende traçar rotas para os veículos, determinando a quais clientes deve-se fornecer a mercadoria, de forma a não violar as restrições e otimizar alguma função objetivo.

Normalmente são consideradas três funções objetivos [18]:

1. Minimizar a distância total percorrida (ou tempo gasto) por todos os veículos;
2. Minimizar o número de veículos e deste número mínimo, minimizar a distância total percorrida;
3. Minimizar a combinação de custo de veículos e distância percorrida.

Uma possibilidade freqüentemente explorada nas aplicações é estabelecer *clusters*, que satisfaçam as restrições de capacidades dos veículos, e então sequenciar de forma ótima o roteiro de entregas dos caminhões dentro dos *clusters*. Pode-se resolver um problema de p-medianas capacitado para determinação dos *clusters*, e então aplicar um algoritmo para solução dos problemas de caixeiro viajante resultantes dentro dos *clusters*. Veja *figura 7* para uma solução de rotas para 3 caminhões, aproveitando a solução apresentada na figura 5 para o problema de p-medianas capacitado. Pode-se interpretar que o depósito esta situado fora dos *clusters* e os caminhões devem percorrer um trajeto inicial para entrar nas rotas dos *clusters*.

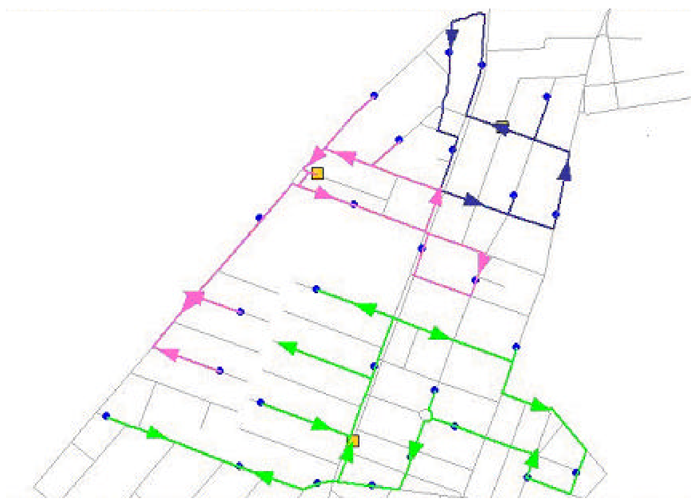


Figura 7: Rotas para 3 caminhões (considerando capacidades)

Existem muitas variações do problema clássico, que podem ser consultadas nos trabalhos [4, 7, 14] (entre outros).

Uma formulação matemática usual, eficiente e muito explorada é a de geração de colunas, onde o problema é formulado como um problema de cobertura/particionamento de conjuntos, com um grande números de colunas (geralmente desconhecidas) que representam as rotas ou programação de atividades (horários) (veja a resenha de [9] para maiores informações). Este modelo foi aplicado com sucesso a problemas de roteamento com janelas de tempo, isto é, períodos determinados em que o produto deve ser entregue, e ainda com outras restrições que seriam difíceis de modelar com formulações distintas dos problemas de cobertura e particionamento de conjuntos [3, 9].

Vale a pena citar que o *modelo de cobertura a)*, formulado para localização é similar ao de roteamento, com uma nova interpretação para as componentes da matriz de cobertura. Neste caso tem-se: $a_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ a\ rota\ passa\ pelo\ nó\ i \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$. A função objetivo deve levar em conta os custos das rotas, por exemplo c_j, e tem-se a formulação:

d) Roteamento com geração de colunas

$$Min \sum_{j=1}^{nc} c_j x_j$$

sujeito a
$$\sum_{j=1}^{nc} a_{ij} x_j = 1, \; i = 1,\dots,m$$
$$x_j \in \{0,1\}, \; j = 1,\dots,nc;$$

onde nc é o número de colunas, que é em geral muito grande.

5. ALGORITMOS

Nesta seção será descrita a heurística de *localização-alocação* alternada, sugerida para aproximar a solução de problemas de *clustering*. Também serão comentados outros algoritmos mais elaborados que encontram soluções de melhor qualidade.

Observe inicialmente que cada vez que se identifica um conjunto de p centros abertos (medianas ou centros para cobertura), também são identificados p *clusters* C^k, $k \in \{1, 2, ..., p\}$, formados pelos centros abertos e os alocados a estes (ou cobertos por estes). Pode-se então tentar melhorar a qualidade das localizações e alocações (coberturas) realizando trocas dentro dos *clusters* (e para cada *cluster*), realocando (cobrindo) e formando novos *clusters*.

A heurística de localização-alocação foi inspirada nos trabalhos de Cooper [6] e Taillard [31], e usada com sucesso nos trabalhos [25, 23, 29]. Uma solução inicial pode ser melhorada procurando-se por uma nova mediana (centro aberto) dentro de cada *cluster*, trocando-se a mediana atual por um nó não mediana e recalculando-se as alocações (coberturas). Este processo se repete até que não seja mais possível obter melhorias no custo total da alocação (cobertura).

O algoritmo de *localização-alocação* está descrito a seguir em *pseudo-código*:

```
Enquanto (solução-inicial melhora)
    Para k = 1, ..., p;
        Troque vértices mediana e não-mediana do cluster C^k;
        Calcule o valor v correspondente à melhor realocação (cobertura);
        Se v é melhor que solução-inicial
            Atualize a mediana do cluster C^k ;
            Faça solução-inicial = v ;
        Fim_se;
    Fim_para;
Fim_enquanto;
```

A troca entre vértices mediana e não-mediana em cada *cluster* C^k, $k = 1,..., p$, pode ser executada para:

a) Todos os vértices não medianas do *cluster* C^k, ou
b) Apenas para os vértices não-medianas alocados (cobertos) do *cluster* C^k, ou
c) Apenas para os vértices não-medianas localizados a uma certa distância (ou tempo) do vértice mediana do *cluster* C^k.

A *figura 8* apresenta uma ilustração da heurística de *localização-alocação* para o caso do problema de máxima cobertura.

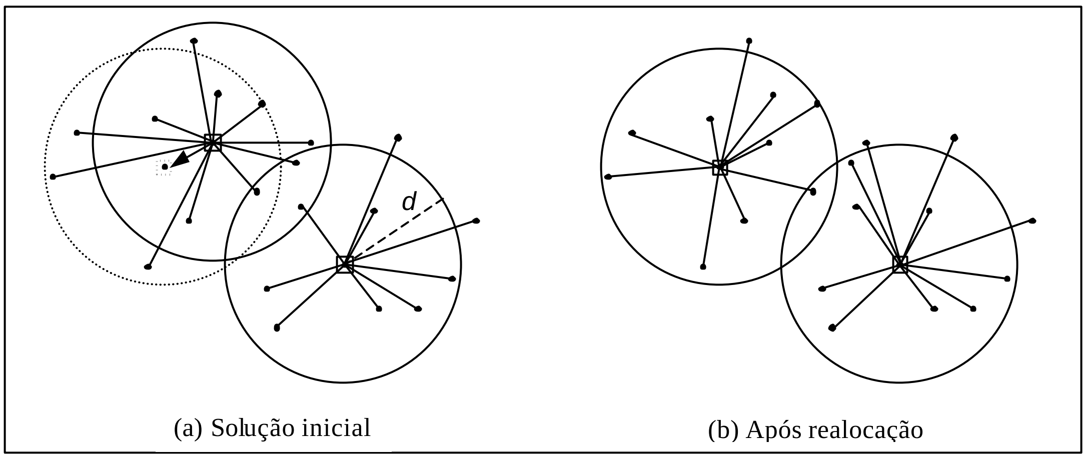


Figura 8: Ilustração da heurística de *localização-alocação*

Caso os *clusters* apresentem capacidades, estas devem ser conservadas na definição dos novos *clusters*, isto é, as capacidades dos caminhões não podem ser excedidas (para o roteamento). Se repetida para várias soluções inicias esta heurística é capaz de encontrar bons resultados para problemas com distribuição espacial dos dados.

Esta heurística foi usada como heurística de melhora de soluções combinada com heurísticas Lagrangeanas (ou Lagrangeanas/surrogate) [23, 29], ou ainda como um processo de mutação no algoritmo genético construtivo aplicado ao problema de p-medianas [20]. Os resultados foram bastante satisfatórios, embora possam ser considerados computacionalmente excessivos para problemas grandes. Nestes casos devemos restringir o alcance das trocas dentro dos *clusters*.

Para a solução do *modelo de roteamento d)*, como o número de colunas é muito grande, resolve-se a versão de programação linear do problema por um método conhecido como de geração de colunas. As colunas não são armazenadas explicitamente e geradas quando necessário (veja os trabalhos [3, 9]).

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise de redes ocupa papel destacado na análise espacial de dados. As redes proporcionam ambientes adequados para a definição e modelagem de diversos problemas importantes.

Neste capítulo foram descritos modelos de localização e roteamento de veículos que podem ser modelados e resolvidos com o auxílio de redes. São problemas de grande importância econômica para planejamento estratégico de setores produtivos, indústrias, prefeituras, comércio, e outros. A otimização destes modelos pode levar a grandes economias em seus investimentos.

Vários são os modelos de localização e roteamento consagrados na literatura. Foram descritos os modelos de cobertura e localização de medianas, e o de roteamento como cobertura de rotas. Foi apresentada uma heurística simples que pode resultar em boas soluções para problemas de localização e alguns problemas de roteamento (formulados como *clustering*).

Espera-se com esta resenha a divulgação destes modelos e de seu uso cada vez maior integrados a SIGs. Para informações mais completas sugere-se a consulta aos trabalhos referenciados abaixo.

Agradecimentos: *O autor agradece à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP (proc. 99/06954-7) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq (proc. 300837/89-5) pelo apoio financeiro parcial.*

REFERÊNCIAS

1. ARSIG – Análise de redes com sistemas de informações geográficas. Projeto temático FAPESP. Junho 1997 / junho 1999, http://www.lac.inpe.br/~lorena/ArsigIndex.html
2. ARSIG2 – Sistemas de apoio à decisão usando redes e sistemas de informações geográficas. Projeto temático FAPESP. Julho 2000 / julho 2002, http://www.lac.inpe.br/~lorena/ArsigIndex.html
3. Barnhart, C.; Johnson, E.L.; Nemhauser, G.L.; Savelsbergh, M.W.P. and Vance, P.H. *Branch-and-Price: Column Generation for Solving Huge Integer Programs*, Operations Research 46 (1998) 316-329.
4. Bodin, L.; Golden, B.; Assad, A.; Ball, M. Routing and scheduling of vehicles and crews: the state of the art. *Computers and Operations Research, 10*(2): 65-211, 1983.
5. Church, R. L. and ReVelle, C. S. (1974). The Maximal Covering Location Problem. Papers of The Regional Science Association, 32: 101-118.

6. Cooper, L. Location-allocation problems. Operations Research, 11: 331-343, 1963.

7. Christofides, N.; Mingozzi, A and Toth P. The vehicle routing problem. In Combinatorial Optimization, Christofides, N. ; Mingozzi, A ; Toth P. and Sandi C. (eds.). John Wiley, 1979.

8. Daskin, M. (1995). Network and Discrete Location: Models, Algorithms and Applications. Wiley Interscience, New York, USA.

9. Desrosiers, J. ; Dumas Y.; Solomon, M. M. and Soumis, F. *Time constrained routing and scheduling. In Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol8, Network routing, Ball, M. O , T. L. Magnanti and G. L. Nemhauser (eds.) North-Holland, 1995.*

10. Drezner, Z. (Editor) (1995). Facility Location: A Survey of Applications and Methods. Springer-Verlag, New York, USA.

11. ESRI - Environmental Systems Research Institute, Inc. *Avenue Customization and Application Development for ArcView*, Redlands, CA, 1996.

12. Galvão, R. D. and ReVelle, C. S. (1996). A Lagrangean Heuristic for the Maximal Covering Location Problem. European Journal of Operational Research, 88: 114-123.

13. Galvão, R. D., Espejo, L. G. A. and Boffey, B. (2000). A Comparison of Lagrangean and Surrogate Relaxations for the Maximal Covering Location Problem. European Journal of Operational Research, 124: 377-389.

14. Gendreau, M. ; Laporte G. and Potvin J-Y. *Vehicle routing: modern heuristics. In Local Search in Combinatorial Optimization. Edited by E. Aarts and J. K. Lenstra* - p. 311-336. John Wiley, 1997.

15. Hakimi, S.L. Optimum location of switching centers and the absolute centers and the medians of a graph, *Operations Research*, 12: 450-459, 1964.

16. Hakimi, S. L. (1965). Optimum Distribution of Switching Centers in a Communication Network and Some Related Graph Theoretic Problems. Operations Research, 13: 462-475.

17. Hillsman, E. L. (1984). The p-Median Structure as a Unified Linear Model for Location-Allocation Analysis. Environmental and Planning A, 16: 305-318.

18. Laporte, G. The vehicle routing problem: an overview of exact and approximate algorithms. *European Jounal of Operational Research, 59*: 345-358, 1992.

19. Larson, R.C.; Odoni, A.R. *Urban Operations Research*, Prentice Hall, NJ, 1981.

20. Lorena, L.A.N.; Furtado, J.C. *Constructive genetic algorithm for clustering problems*. Apresentado no Optimization 98- Coimbra, Portugal, Jul. 1998. Aceito para publicação na revista internacional *Evolutionary Computation*.

21. Lorena, L.A.N.; Lopes, F.B. A surrogate heuristic for set covering problems. *European Journal of Operational Research*, 79: 138-150, 1994.

22. Lorena, L. A N. and Narciso, M. G. *Using logical surrogate information in Lagrangean relaxation: an application to symmetric traveling salesman problems*. Apresentado no IFORS´99 - China - Agosto - 1999. Aceito para publicação no *EJOR*.

23. Lorena, L. A. N. and Pereira M. A. *A Lagrangean/surrogate heuristic for the maximal covering location problem using Hillsman's edition.* Submetido para publicação - International Journal of Industrial Engineering - Special Issue on Facility Location and Layout - 2001.

24. Lorena, L.A.N.; Senne, E.L.F. Improving traditional subgradient scheme for Lagrangean relaxation: an application to location problems, *International Journal of Mathematical Algorithms*, 1: 133-151, 1999.

25. Lorena, L. A. N. ; Senne, E. L. F. ; Paiva, J. A. C. e Pereira M. A. *Integração de modelos de localização a sistemas de informações geográficas.* Aceito para publicação - Gestão e Produção - 2001.

26. Narciso, M. G. and Lorena, L. A. N. (1999). Lagrangean/Surrogate Relaxation for Generalized Assignment Problems. European Journal of Operational Research, 114: 165-177.

27. ReVelle, C. S. and Swain, R. W. (1970). Central Facilities Location. Geographical Analysis, 2: 30-42.

28. Schilling, D. A., Rosing, K. E. and ReVelle, C. S. (2000). Network Distance Characteristics that Affect Computational Effort in *p*-Median Location Problems. European Journal of Operational Research, 127: 525-536.

29. Senne, E. L. F. and Lorena, L. A. N. (2000). Lagrangean /Surrogate Heuristics for p-Median Problems. In Computing Tools for Modeling, Optimization and Simulation: Interfaces in Computer Science and Operations Research (Eds.: M. Laguna and J. L. Gonzales-Velarde). Kluwer Academic Publishers, New York, pp. 115-130.

30. SPRING - *Sistema de Processamento de Informações Georeferenciadas*, INPE, São José dos Campos, SP, http://www.dpi.inpe.br/spring, 1998.

31. Taillard, E.D. *Heuristic methods for large centroid clustering problems*, Technical report IDSIA96-96, IDSIA, 1996.