



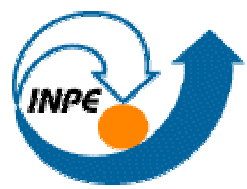
CAP 254

Otimização Combinatória

Professor: **Dr. L.A.N. Lorena**

Assunto: Metaheurísticas

Antonio Augusto Chaves



Conteúdo

C01 – Simulated Annealing (20/11/07).

C02 – Busca Tabu (22/11/07).

C03 – Colônia de Formigas (27/11/07).

C04 - GRASP e VNS (29/11/07).

C05 – Metaheurísticas Híbridas – CS (04/12/07).

Material baseado nas notas de aula do Prof. Dr. Marcone Jamilson Freitas Souza (UFOP)

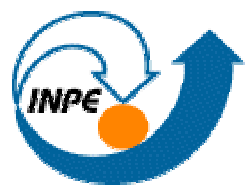
<http://www.decom.ufop.br/prof/marcone/>

e em material da Prof. Estéfane G. M. de Lacerda (UFRN)

www.dca.ufrn.br/~estefane/metaheuristicas



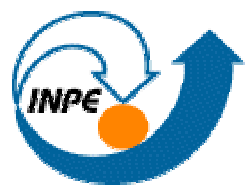
Colônia de Formigas (Ant Colony)



O que é Otimização por Colônia de Formigas?

- Colônia de formigas é uma metaheurística baseada em **população** e inspirada no comportamento **forrageiro** das formigas.

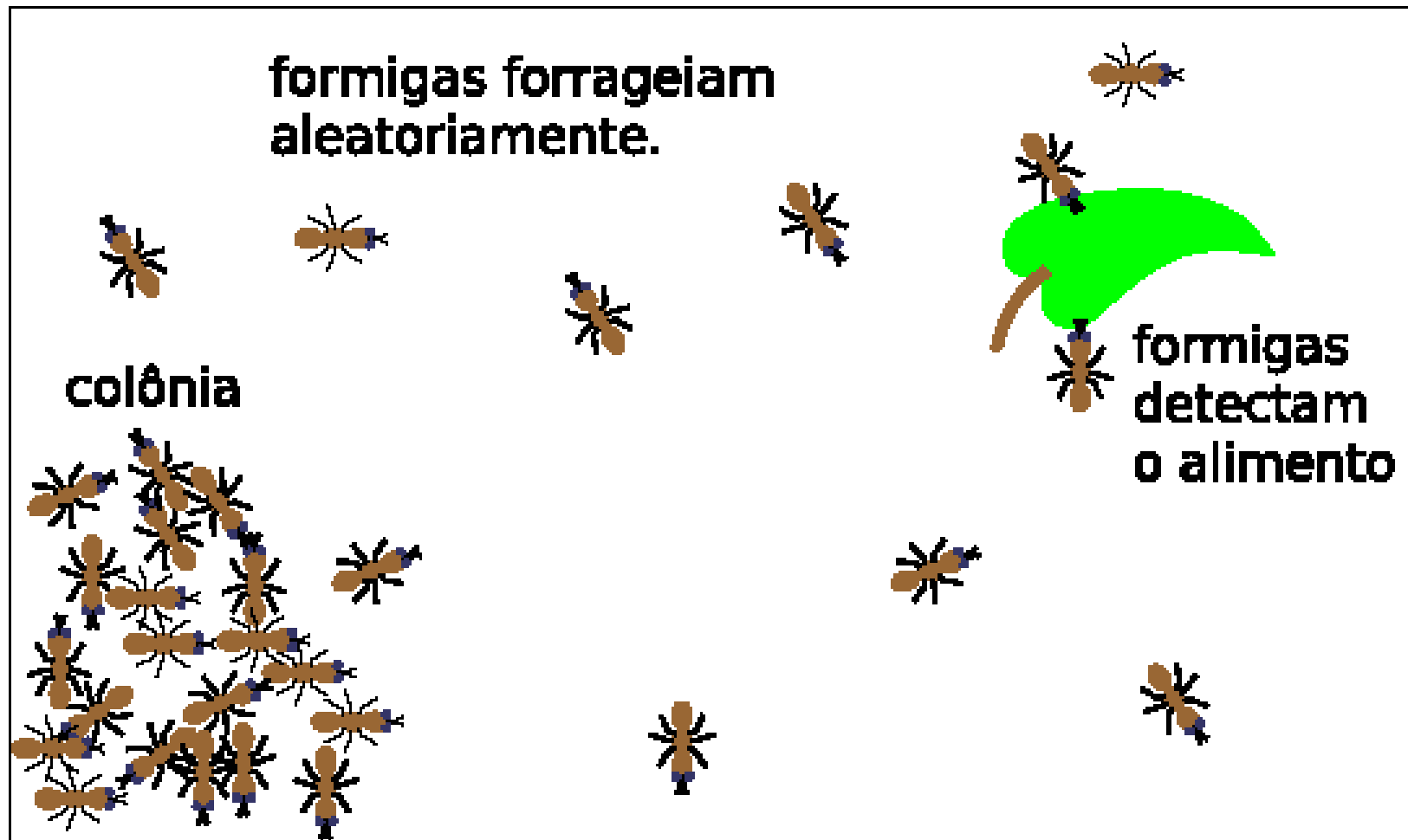




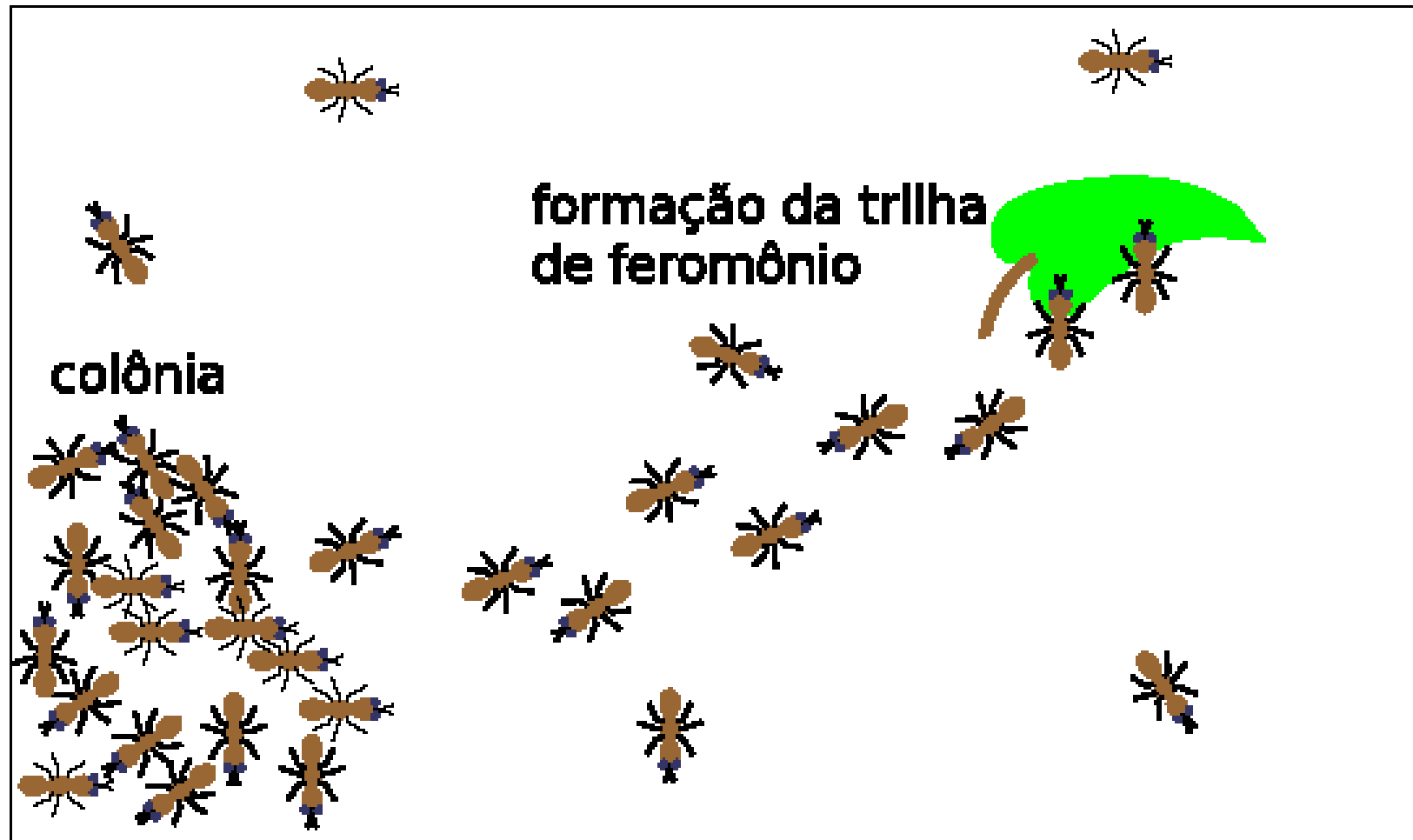
A Inspiração Biológica

- Muitas espécies de formigas são quase **cegas**.
- A **comunicação** entre as formigas é realizada através de uma substância química denominada de **feromônio**.
- Em algumas espécies, o feromônio é usado para criar **caminhos** (trilhas de formigas).

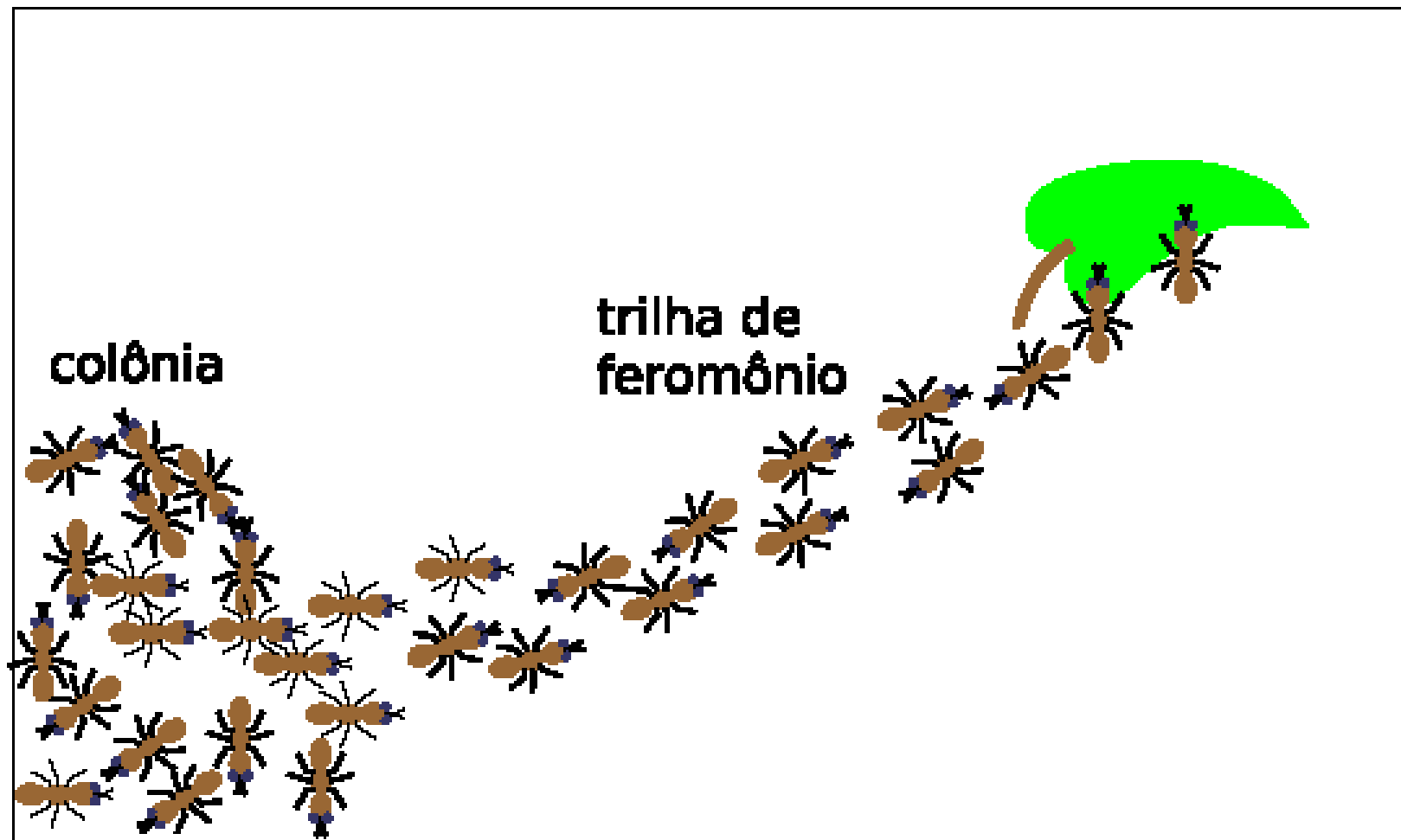
A Inspiração Biológica

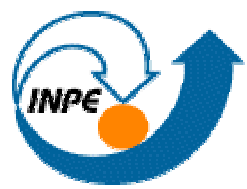


A Inspiração Biológica



A Inspiração Biológica



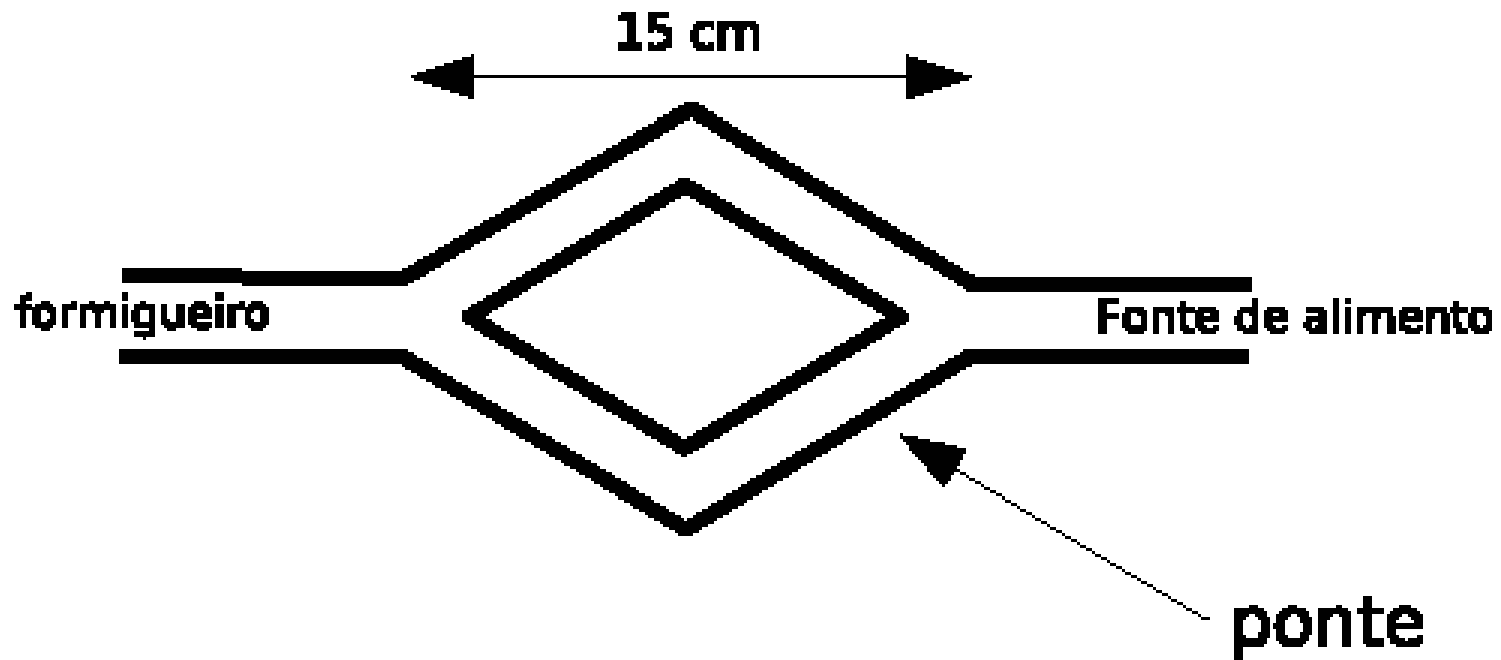


A Inspiração Biológica

- Ao **caminhar**, as formigas depositam no chão o **feromônio**, formando, deste modo, uma **trilha** de feromônios.
- As formigas sentem o **cheiro** do feromônio, e quando elas têm que **escolher** um caminho, escolhem, com **maior probabilidade**, o caminho com **maior quantidade** de feromônio (cheiro mais forte).
- A trilha ajuda a formiga a **achar o caminho de volta** e as outras formigas a **encontrar a fonte de alimentos**.

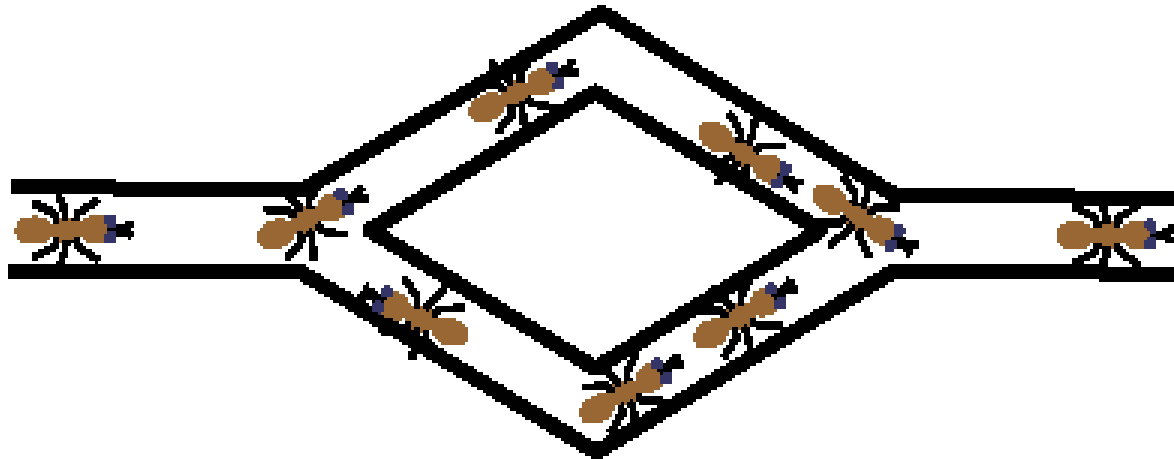
O Experimento da Ponte Binária

- Experimento realizado por Deneubourg et al., 1990, para estudar o comportamento forrageiro das formigas.



O Experimento da Ponte Binária

- No Início:

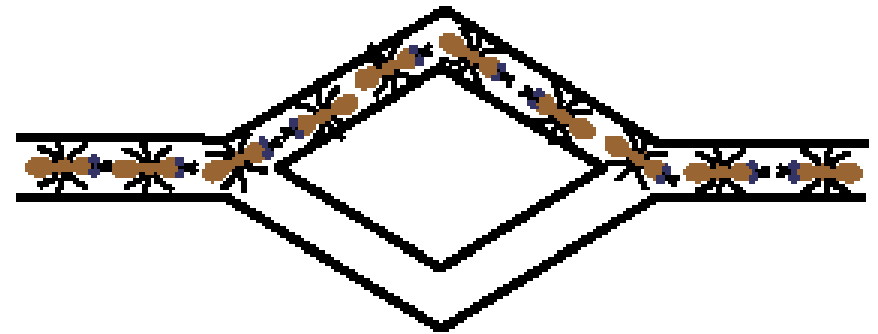


- As formigas são deixadas **livres** para escolher o caminho.
- **Não** há feromônio ainda.

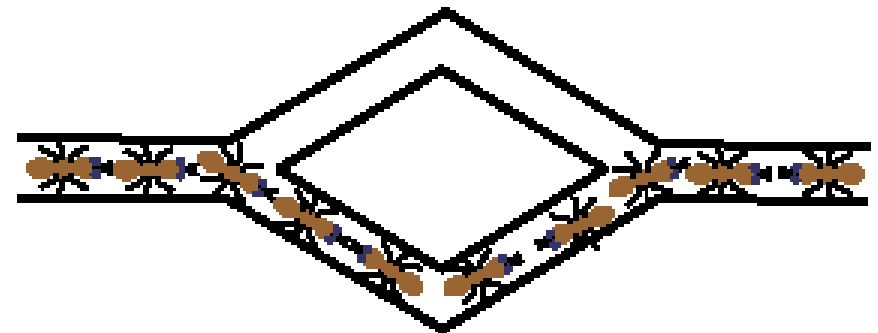
O Experimento da Ponte Binária

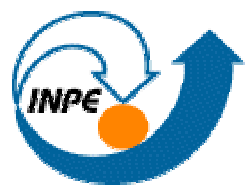
- As formigas **convergem** para um dos caminhos com igual probabilidade.
- Devido a flutuações aleatórias, uma das pontes terá mais feromônio e atrairá as formigas com maior probabilidade.

No Fim:



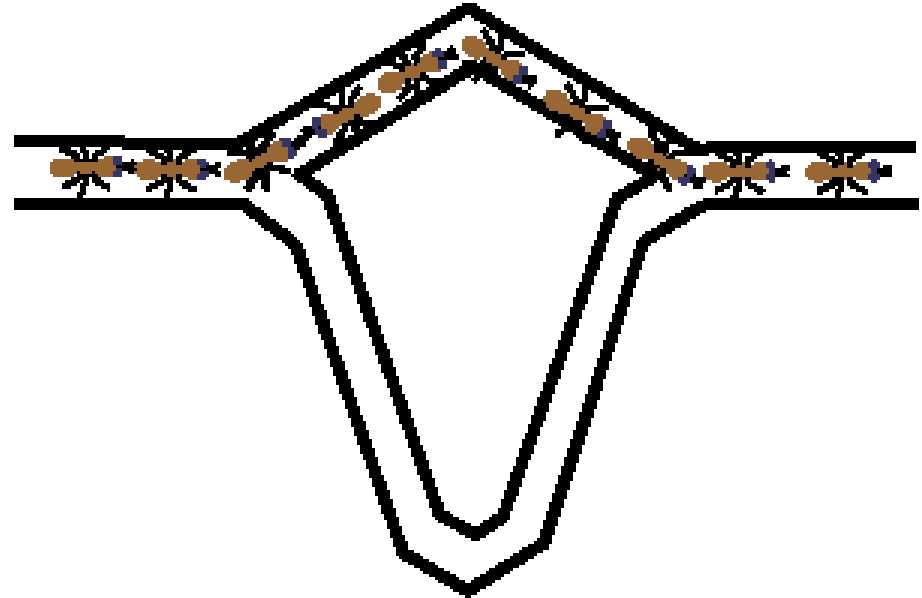
ou

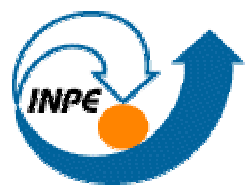




O Experimento da Ponte Binária

- Usando pontes de tamanhos **diferentes**, as formigas **convergem** para a **ponte mais curta**:
- A ponte curta é percorrida em **menos tempo**, fazendo com que **mais** formigas atravessem ela. Logo, mais **feromônio** é depositado.
- As formigas escolhem, com **maior probabilidade**, a ponte curta (com mais feromônio).



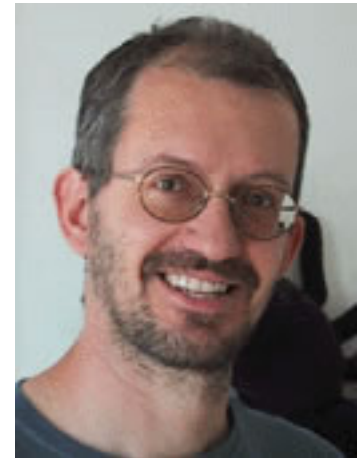


Formigas Artificiais

- Formigas artificiais são **heurísticas construtivas**.
- Elas constroem soluções de forma **probabilística** utilizando duas informações:
 1. A **trilha de feromônio** (artificial) que muda dinamicamente durante a execução do programa de modo a refletir a experiência já adquirida durante a busca.
 2. A **informação heurística** específica do problema a ser resolvido.

Ant System

- Proposto por Marco Dorigo e colaboradores (DORIGO et al., 1991)
- O Ant System é o primeiro algoritmo que surgiu inspirado em colônia de formigas.
- Peculiaridades do ambiente das formigas utilizadas:
 - Ao tomar um caminho a formiga deixa no mesmo uma certa quantidade de **feromônio**;
 - Uma formiga escolhe determinado caminho de acordo com uma função probabilística envolvendo a **distância deste caminho** e a **quantidade de feromônio** presente neste;
 - As formigas **lembram** os pontos por onde já passaram e não retornam a estes pontos até que tenham chegado à fonte de alimento;

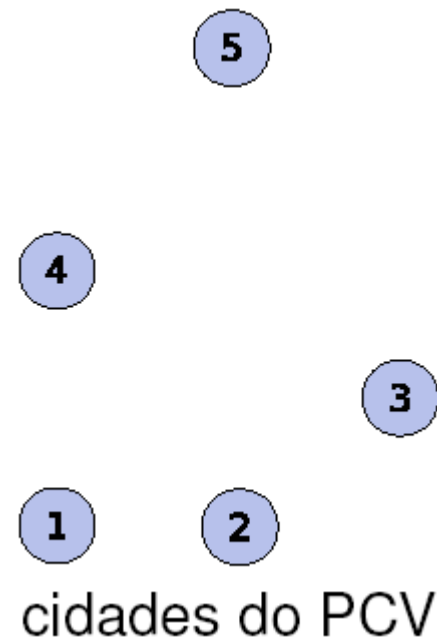


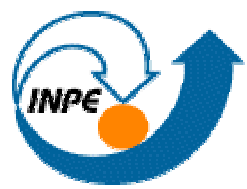


Aplicação do Ant System ao PCV

Matriz Distância do PCV

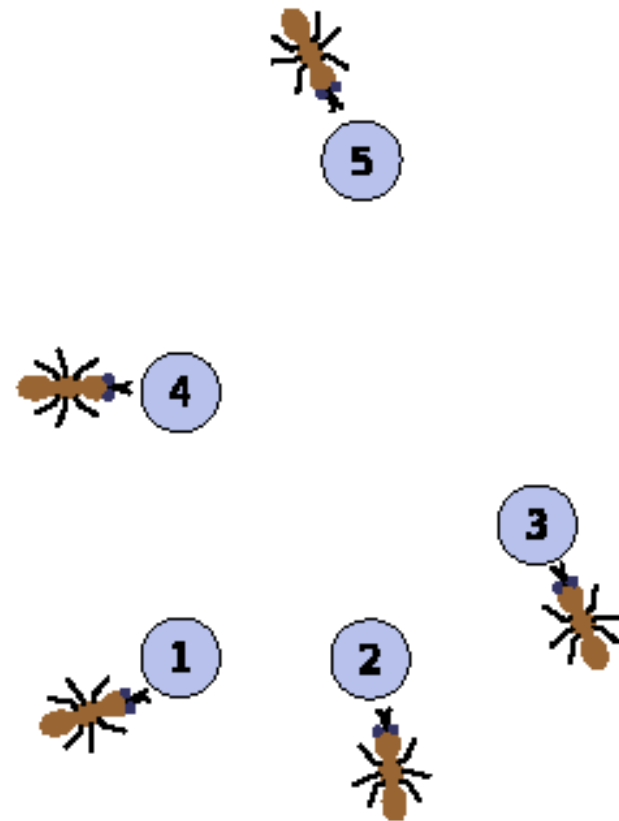
	1	2	3	4	5
1	0,0	1,0	2,2	2,0	4,1
2	1,0	0,0	1,4	2,2	4,0
3	2,2	1,4	0,0	2,2	3,2
4	2,0	2,2	2,2	0,0	2,2
5	4,1	4,0	3,2	2,2	0,0





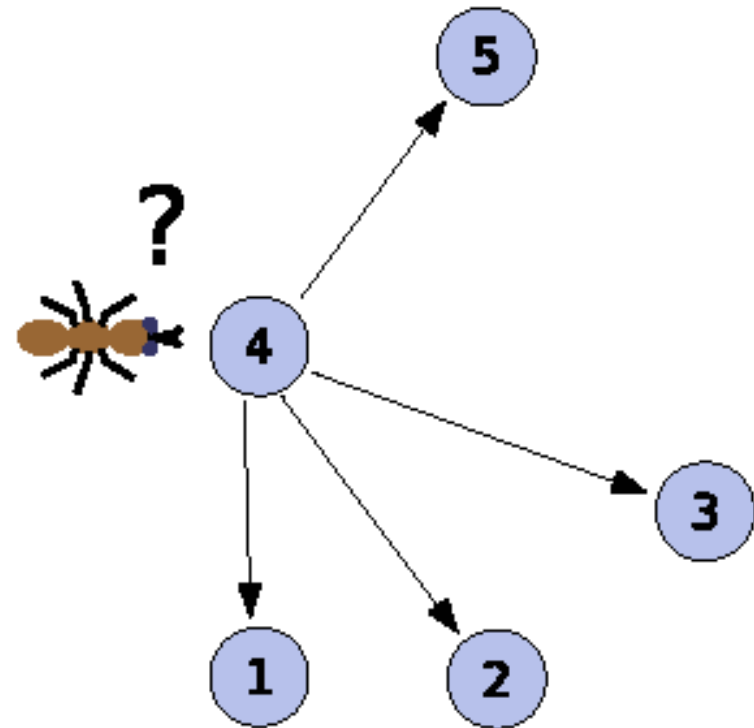
Aplicação do Ant System ao PCV

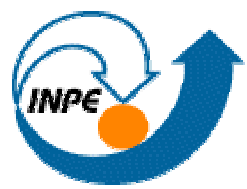
- Cada formiga irá **construir** uma solução movendo-se de uma cidade para outra.
- No início, cada formiga é colocada em uma **cidade diferente** (ou colocada aleatoriamente).



A Construção da Solução pela Formiga

- Começando de uma cidade i , a formiga **move-se** escolhendo probabilisticamente a cidade vizinha j (entre os vizinhos factíveis).





Probabilidade de Transição

- A **probabilidade** da formiga k que está na cidade i de escolher a cidade j é dada pela regra:

$$p_{ij}^k(t) = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}(t)]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{l \in N_i^k} [\tau_{il}(t)]^\alpha [\eta_{il}]^\beta}, & \text{se } j \in N_i^k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

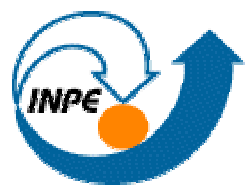
onde,

$\tau_{ij}(t)$: quantidade de feromônio presente no caminho (i,j)

$\eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$: visibilidade da cidade j com relação a cidade i

α e β são parâmetros para determinar a influência do feromônio e da informação heurística,

N_i^k é a vizinhança factível da formiga k (i.e., o conjunto das cidades ainda não visitadas pela formiga k).



A Informação Heurística do PCV

- Associada a aresta (i, j) existe um valor heurístico η_{ij} dado por

$$\eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

que representa a **atratividade** da formiga visitar a cidade j depois de visitar a cidade i .

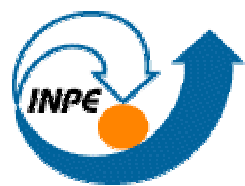
- O valor η_{ij} é inversamente proporcional a distância d_{ij} entre as cidades i e j .



Construção das rotas - Passo 1

formiga	Candidatos / prob. de transição	solução parcial
1	2(45%), 3(21%), 4(23%), 5(11%)	1-2
2	1(41%), 3(30%), 4(19%), 5(10%)	2-1
3	1(23%), 2(37%), 4(23%), 5(16%)	3-4
4	1(27%), 2(24%), 3(24%), 5(24%)	4-5
5	1(19%), 2(20%), 3(25%), 4(36%)	5-2

- A escolha do candidato é de acordo com a **probabilidade de transição**. É feita de forma similar ao algoritmo da **roleta** dos algoritmos genéticos.



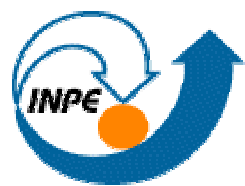
Construção das rotas - Passo 2

formiga	Candidatos / prob. de transição	solução parcial
1	3(50%), 4(32%), 5(18%)	1-2-3
2	3(38%), 4(42%), 5(20%)	2-1-4
3	1(35%), 2(32%), 5(32%)	3-4-5
4	1(30%), 2(31%), 3(39%)	4-5-2
5	1(46%), 3(33%), 4(21%)	5-2-1



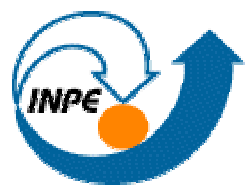
Construção das rotas - Passo 3

formiga	Candidatos / prob. de transição	solução parcial
1	4(59%), 5(41%)	1-2-3-5
2	3(50%), 5(50%)	2-1-4-5
3	1(49%), 2(51%)	3-4-5-1
4	1(58%), 3(42%)	4-5-2-1
5	3(48%), 4(52%)	5-2-1-4



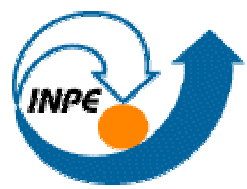
Construção das rotas - Passo 4

formiga	Candidatos / prob. de transição	solução parcial
1	4(100%)	1-2-3-5-4
2	3(100%)	2-1-4-5-3
3	2(100%)	3-4-5-1-2
4	3(100%)	4-5-2-1-3
5	3(100%)	5-2-1-4-3



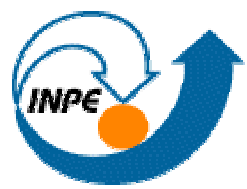
Término da Primeira Iteração

formiga (k)	solução completa	comprimento da viagem (L_k)
1	1-2-3-5-4-1	9,8
2	2-1-4-5-3-2	9,8
3	3-4-5-1-2-3	10,9
4	4-5-2-1-3-4	11,6
5	5-2-1-4-3-5	12,4



Atualização do Feromônio

- No **feromônio** τ_{ij} associado a aresta (i, j) ocorre dois eventos:
 1. A **evaporação**;
 - Evita que o feromônio acumulado cresça indefinidamente;
 - Permite esquecer decisões ruins do passado da busca.
 2. O **depósito** de feromônio de todas as formigas que passaram sobre (i, j) .



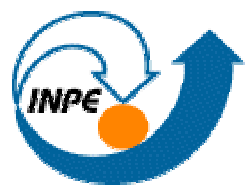
Atualização do Feromônio

- Depois que todas as formigas construíram suas rotas, o feromônio é atualizado.
- $\Delta \tau_{ij}^k$ é a quantidade de feromônio que a formiga k **deposita** sobre a aresta (i, j) . É dado por:

$$\Delta \tau_{ij}^k = \begin{cases} Q / L_k, & \text{se a aresta } (i, j) \text{ pertence a rota } S_k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde

Q : quantidade de feromônio excretada por uma formiga a cada iteração



Atualização do Feromônio

- O feromônio τ_{ij} associado a aresta (i, j) é **atualizado** pelo fórmula:

$$\tau_{ij}(t+1) = \underbrace{(1 - \rho)\tau_{ij}(t)}_{\text{evaporação}} + \underbrace{\sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij}^k(t)}_{\text{depósito}}$$

onde

$\rho \in [0,1]$ é a taxa de evaporação de feromônio



Exemplo de Atualização do Feromônio

Atualização do Feromônio da aresta (3,5)

- Apenas as formigas 1, 2 e 5 depositam feromônio nesta aresta. Suponha $Q = 1, 0$. A contribuição de cada formiga:

$$\Delta \tau_{3,5}^{(1)} = 1 / L_1 = 0,102$$

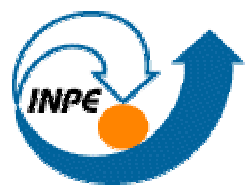
$$\Delta \tau_{3,5}^{(2)} = 1 / L_2 = 0,102$$

$$\Delta \tau_{3,5}^{(5)} = 1 / L_5 = 0,081$$

k	viagem	L_k
1	1-2-3-5-4-1	9,8
2	2-1-4-5-3-2	9,8
3	3-4-5-1-2-3	10,9
4	4-5-2-1-3-4	11,6
5	5-2-1-4-3-5	12,4

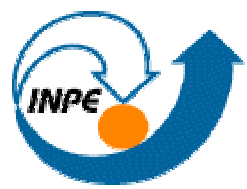
Suponha $\rho = 0,5$

$$\begin{aligned} \tau_{3,5} &= (1 - \rho) \tau_{ij} + \Delta \tau_{3,5}^{(1)} + \Delta \tau_{3,5}^{(2)} + \Delta \tau_{3,5}^{(5)} \\ &= (1 - 0,5) 1,0 + 0,102 + 0,102 + 0,081 \\ &= 0,785 \end{aligned}$$



Critérios de Parada

- Número **máximo** de iterações;
- **Estagnação**.

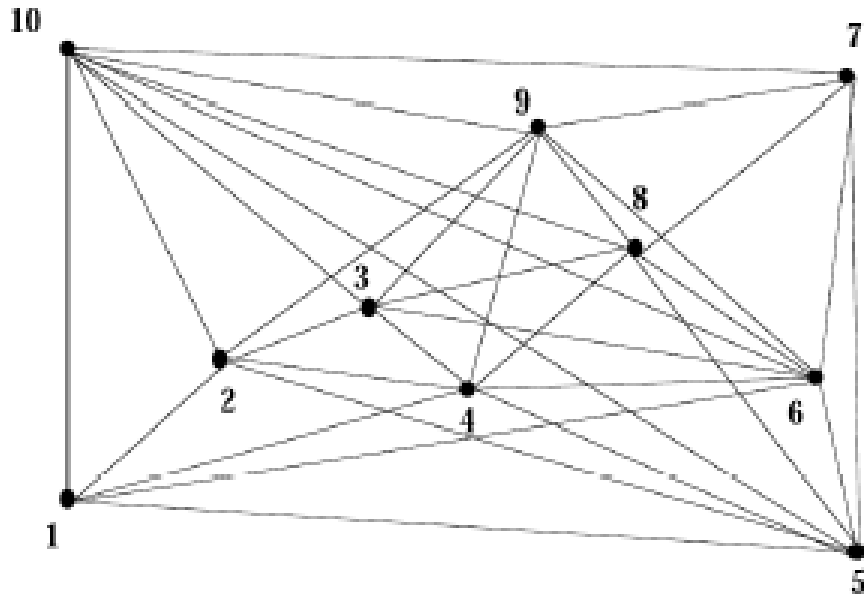


Estagnação

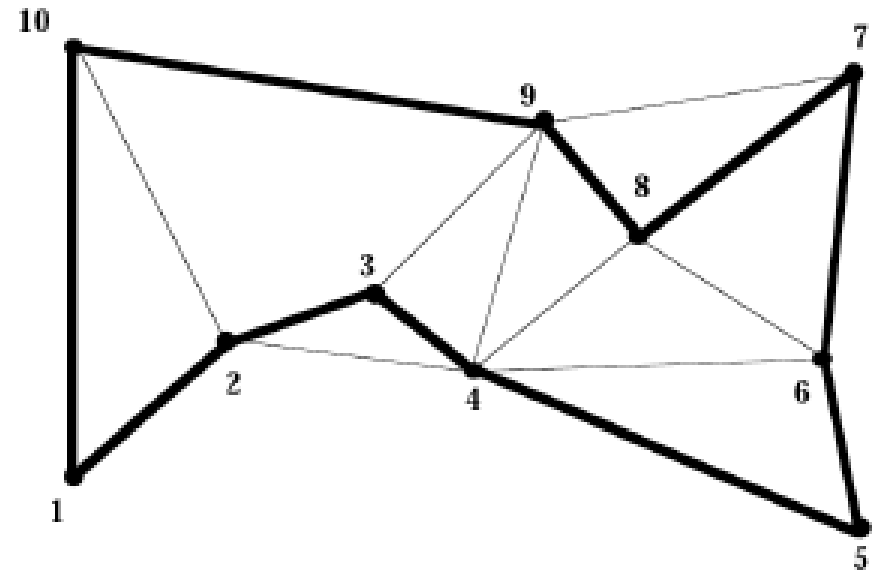
- **Estagnação** é a situação na qual **todas** as formigas seguem sempre o **mesmo** percurso.
- A Estagnação é causado pelo excessivo crescimento de feromônio nas arestas de uma rota sub-ótima.

Estagnação

- Apesar da natureza **estocástica** do algoritmo, a forte concentração de feromônio nas arestas força a formiga a fazer **sempre** o mesmo percurso.



Distribuição de feromônio no início da busca.



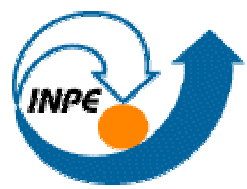
Distribuição de feromônio após 100 iterações.



Procedimento Ant System

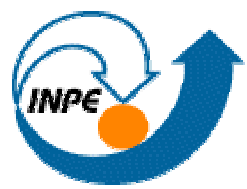
Algoritmo AntSystem

- 1: Seja Q e τ_0 constantes;
Faça $f(s^*) \leftarrow \infty$;
- 2: Faça $\Delta\tau_{ij} \leftarrow 0$ e $\tau_{ij} \leftarrow \tau_0$ para todo arco (i, j) ;
- 3: **Para** (cada formiga $k = 1, \dots, m$) **faça**
 - (a) Selecione a cidade inicial para a k -ésima formiga;
 - (b) Obtenha uma rota R^k para cada formiga k de acordo com o procedimento seguido por cada formiga;
 - (c) Seja L^k o comprimento da rota R^k ;
 - (d) **Se** ($L^k < f(s^*)$) **então** $s^* \leftarrow R^k$;
 - (e) Calcule a quantidade de rastro deixado pela formiga k :
se (arco (i, j) pertence à rota R^k)
então $\Delta\tau_{ij} \leftarrow Q / L^k$;
senão $\Delta\tau_{ij} \leftarrow 0$;
 - (f) Faça $\Delta\tau_{ij} \leftarrow \Delta\tau_{ij} + \Delta\tau_{ij}(k)$;
- 4: Faça $\tau_{ij} \leftarrow (1-\rho) \times \tau_{ij} + \Delta\tau_{ij}$;
- 5: **se** (a melhor rota s^* não foi alterada nas últimas k_{\max} iterações)
então PARE: s^* é a melhor solução;
senão retorne ao Passo 3;



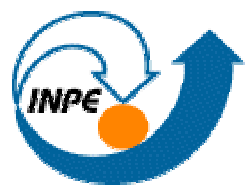
Ant Colony Optimization (ACO)

- Proposta por **Dorigo e Gambardella** (1997)
- **Objetivo**: Transformar a heurística Ant System em uma metaheurística.
- Através de **elitismo**, faz uso de mais **intensificação** do que o AS;
- Apenas a formiga “**best-so-far**” deposita feromônio;
- As formigas removem feromônio para aumentar a **diversificação**.



Semelhanças entre formigas reais e artificiais

- Ambos os sistemas são constituídos por múltiplos **agentes cooperando entre si**;
- Ambos os sistemas utilizam um fator de cooperação, através do qual acontece a sinergia entre os agentes (**feromônio**). O feromônio representa a informação coletiva, e é essencial no desenvolvimento de ambos os sistemas. Ocorre também a **evaporação** do feromônio, o que permite às formigas a possibilidade de explorarem novos horizontes;
- Os agentes dividem a **mesma função** em ambos os sistemas: buscar o **menor caminho** entre uma origem (ninho) e um destino (alimento);
- O comportamento **estocástico** e **local** dos agentes na busca por soluções. Não há, em ambos agentes, a visão supra adjacente.



Diferenças entre formigas reais e artificiais

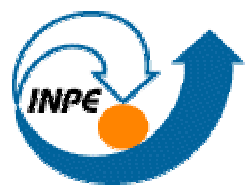
- As formigas artificiais possuem **movimentação discreta**, sendo que seus movimentos consistem em origens e destinos discretos;
- Existe, nas formigas artificiais, um estado interno ou **memória**, para que não haja sobreposição de movimentos;
- O depósito de feromônio no mundo artificial ocorre com base na **qualidade** da solução encontrada;
- Diferentemente do mundo real, onde formigas depositam feromônio sob demanda.
- Aproximação para o modelo computacional: formigas deixam o feromônio em cada arco visitado **após** chegar ao destino (na vida real as formigas deixam o feromônio durante o movimento e não após chegar ao seu destino)



Particle Swarm Optimization (PSO)

(Otimização de Nuvem de Partículas)

(Bando de Pássaros)

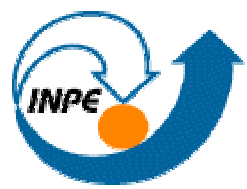


Particle Swarm Optimization (PSO)

- **Otimização de Nuvem de Partículas:** desenvolvida por James Kennedy (psicólogo) e Russell Eberhart (engenheiro elétrico) em 1995.

J. Kennedy, and R. Eberhart, *Particle swarm optimization*, in *Proceedures of the IEEE International Conference on Neural Networks*, Piscataway, NJ, pp. 1942–1948, 1995.

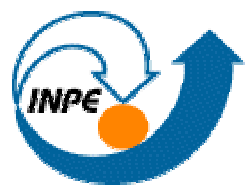
- Inspirado no **comportamento** e na **dinâmica** dos **movimentos dos pássaros, insetos e peixes**;
- Originalmente desenvolvido para problemas de otimização com variáveis contínuas;
- Desempenho similar ao dos Algoritmos Genéticos;



Particle Swarm Optimization (PSO)

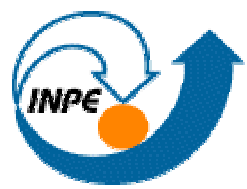
- Estudos apontam que um bando de pássaros encontra alimento por meio de esforço conjunto. Isto sugere que eles **compartilham informações**.





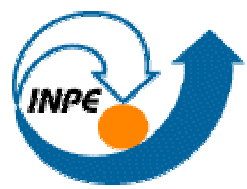
Particle Swarm Optimization (PSO)

- A coreografia estética de um **bando de pássaros** em vôo chamou a atenção de zoologistas e cientistas da computação.
- **Dúvida:** Quais as **regras** empregadas pelos pássaros para estarem voando sincronamente e, mudarem de direção repentinamente, espalhando-se e reagrupando-se em seguida?
- **Solução:** Modelos baseados em **manipulação de distâncias** entre indivíduos têm sido criados, acreditando que o comportamento do bando é um esforço dos pássaros para manter uma distância ótima entre todos os elementos desse bando.



Particle Swarm Optimization (PSO)

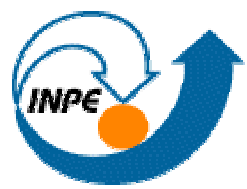
- Um bando de pássaros otimiza certa **função objetivo**.
- Consideremos uma função objetivo com duas variáveis (x e y).
- Cada agente conhece seu melhor valor até o momento ($pbest$) e sua posição XY . Essa informação é a **experiência pessoal**.
- Além disso, cada agente conhece o melhor valor do grupo até o momento ($gbest$) entre todos os $pbest$. Essa informação o é a **experiência do grupo**.



Particle Swarm Optimization (PSO)

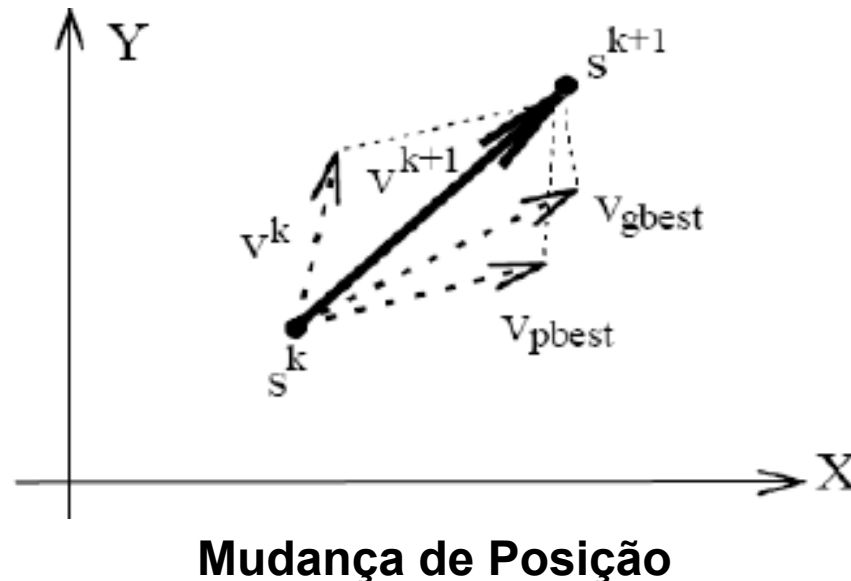
- Cada agente tenta **modificar sua posição** considerando as seguintes informações:
 - a posição corrente (x, y)
 - a velocidade corrente (v_x, v_y)
 - a distância entre a sua posição corrente e $pbest$
 - a distância entre a sua posição corrente e $gbest$
- Uma nova posição é definida pela aplicação do **operador velocidade**. A velocidade de cada agente é calculada pela seguinte equação:

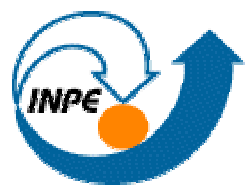
$$v_i^{k+1} = c1.v_i^k + c2.rand_1 * (pbest_i - s_i^k) + c3.rand2 * (gbest - s_i^k)$$



Particle Swarm Optimization (PSO)

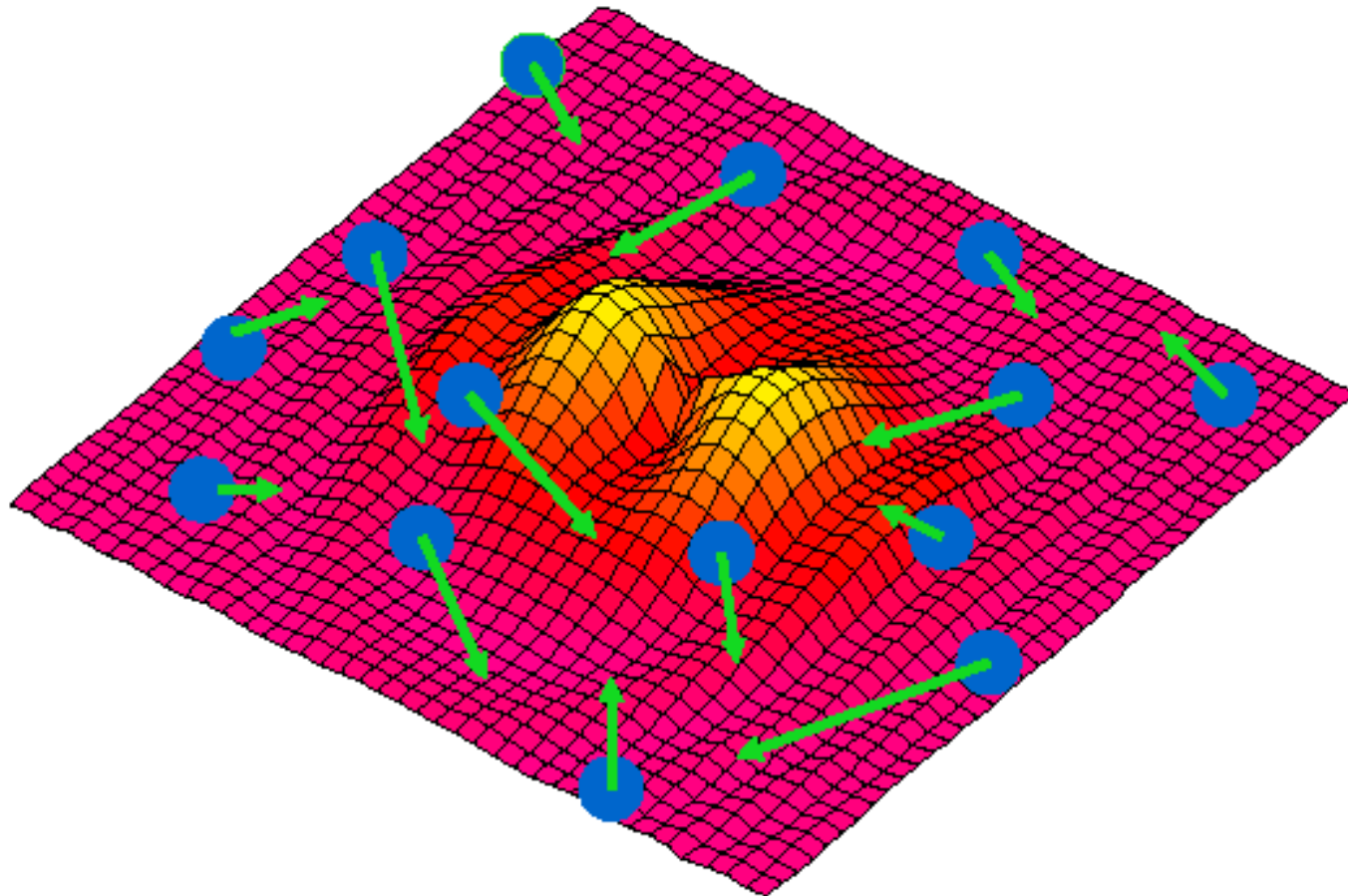
- Os parâmetros c_1 , c_2 , c_3 podem representar coeficientes **cognitivo-sociais** refletindo:
 - c_1 : o quanto a partícula confia em si mesma;
 - c_2 : o quanto a partícula confia em sua experiência;
 - c_3 : o quanto a partícula confia em seus vizinhos.

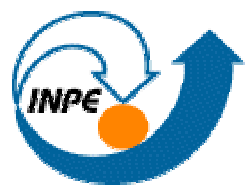




Particle Swarm Optimization (PSO)

- No início as partículas “voam” aleatoriamente pelo espaço de busca.





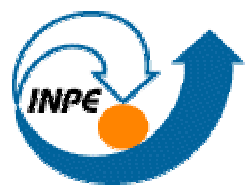
Particle Swarm Optimization (PSO)

- **Vantagens**

- Insensível a mudança de escala das variáveis;
- Implementação simples;
- Adaptável a computadores paralelos;
- Não requer cálculo de derivadas;
- Poucos parâmetros para serem definidos pelo usuário;
- Bom para encontrar o mínimo global;

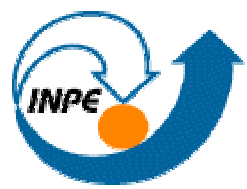
- **Desvantagens**

- Rápido para localizar a bacia de atração das boas soluções, mas lento no ajuste fino da solução (como nos algoritmos genéticos).



Referências

- Página sobre Ant Colony Optimization, desenvolvida por Marco Dorigo:
<http://iridia.ulb.ac.be/~mdorigo/ACO/index.html>
- Página sobre Particle Swarm Optimization (PSO):
<http://www.swarmintelligence.org/>



Conteúdo

C01 – Simulated Annealing (20/11/07).

C02 – Busca Tabu (22/11/07).

C03 – Colônia de Formigas (27/11/07).

C04 - GRASP e VNS (29/11/07).

C05 – Metaheurísticas Híbridas – CS (04/12/07).