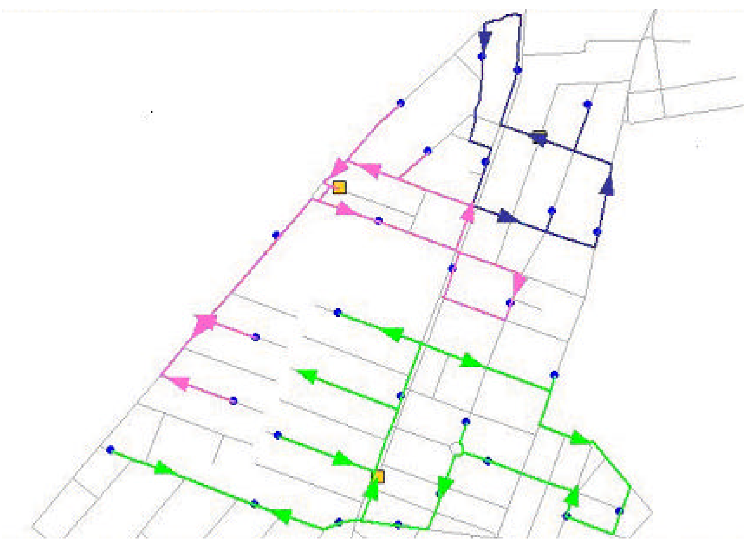
CAP254:Otimização Combinatória



Luiz A. N. Lorena

LAC/INPE

lorena@lac.inpe.br

http://www.lac.inpe.br/~lorena

2002

Programa

Introdução

Formulação de Modelos

Complexidade de Algoritmos e Grafos

Heurísticas lagrangeanas

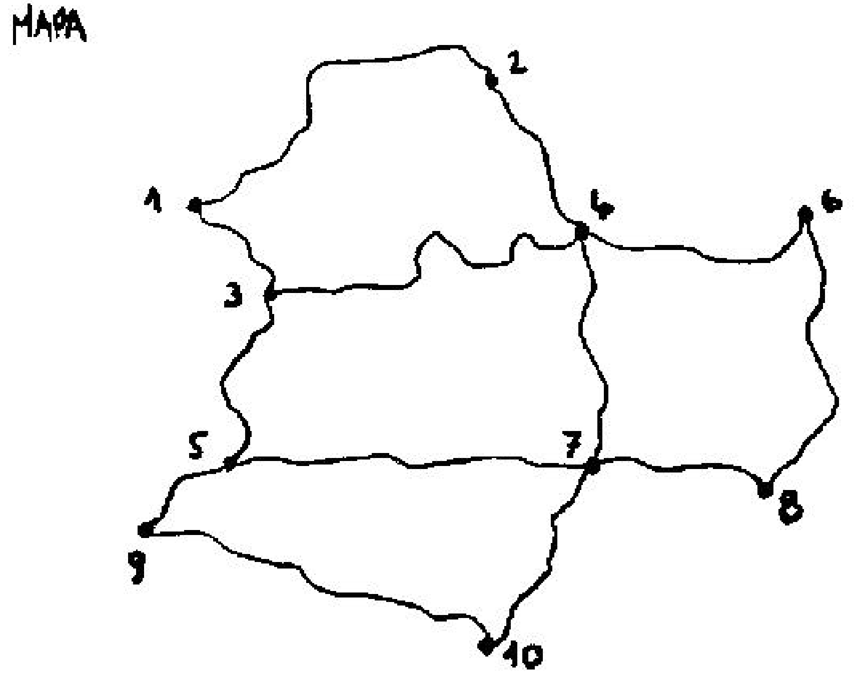
Meta-heurísticas:

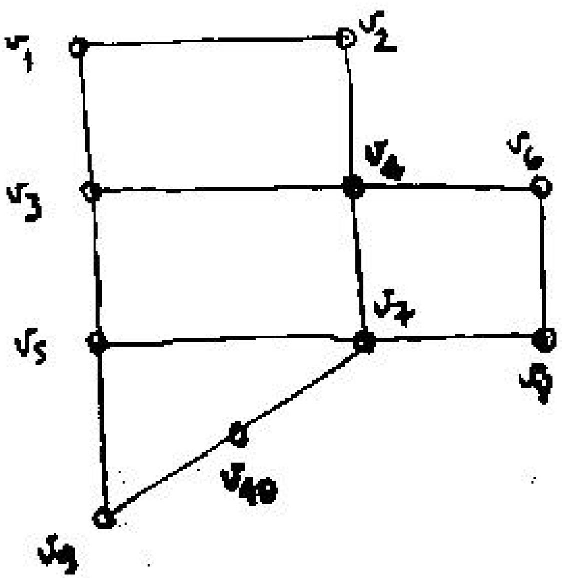
- Algoritmos genéticos ...

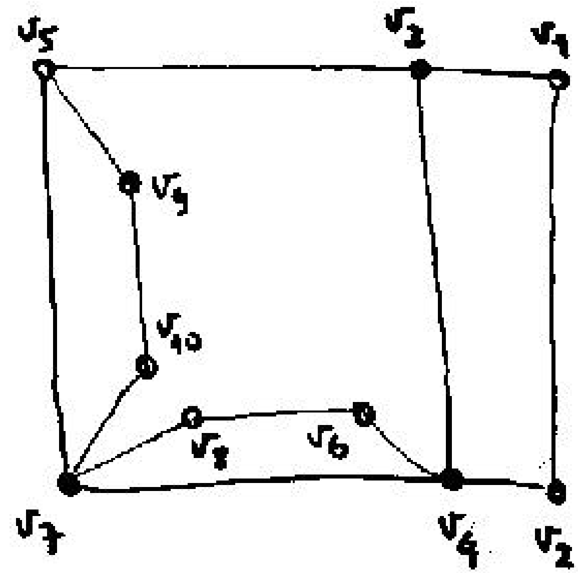
Problemas:

- Localização de facilidades
- Roteamento de veículos
- Cobertura de conjuntos ...

GRAFOS

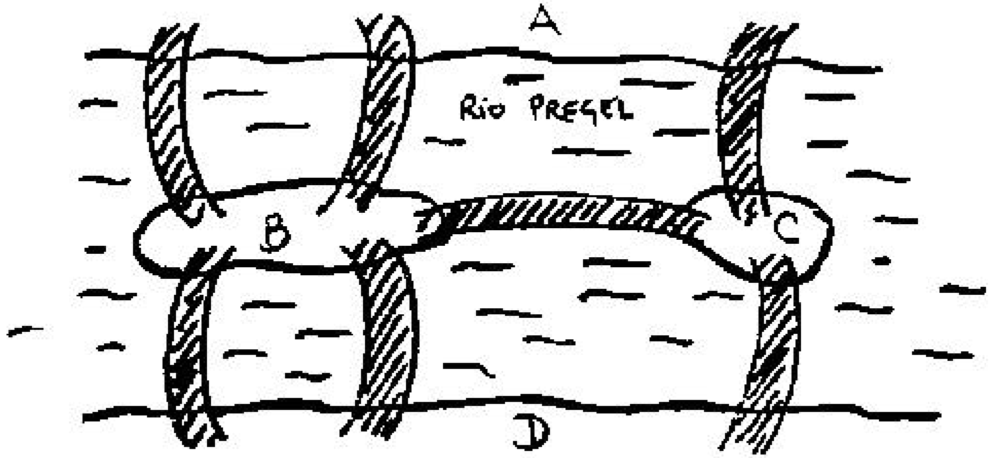

MAPA
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


v1
v2
v3
v4
v5
v6
v7
v8
v9
v10


v5
v3
v1
v9
v10
v8
v6
v7
v4
v2

PROBLEMA → PONTES DE KÖNIGSBERG

1º TRABALHO NA TEORIA DE GRAFOS



DUAS ILHAS → RIO PREGEL

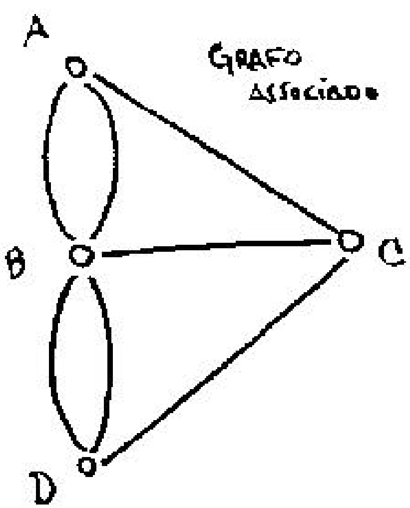
KÖNIGSBERG (KALININGRADO)

7 PONTES

PROBLEMA:

INICIANDO EM QUALQUER DAS REGIÕES - A, B, C, OU D, ANDAR PASSANDO POR CADA PONTE EXATAMENTE UMA VEZ ENTÃO RETORNAR AO INÍCIO.

LEONHARD EULER → 1736



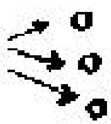
SOLUÇÃO: ...

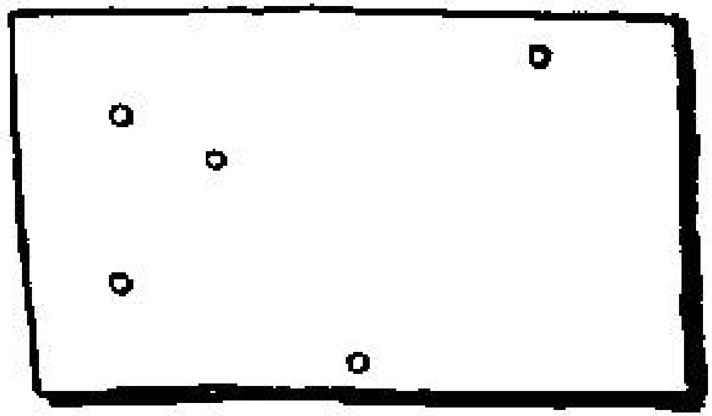
$\exists$ CICLO EULERIANO ? ←

MANUFATURA

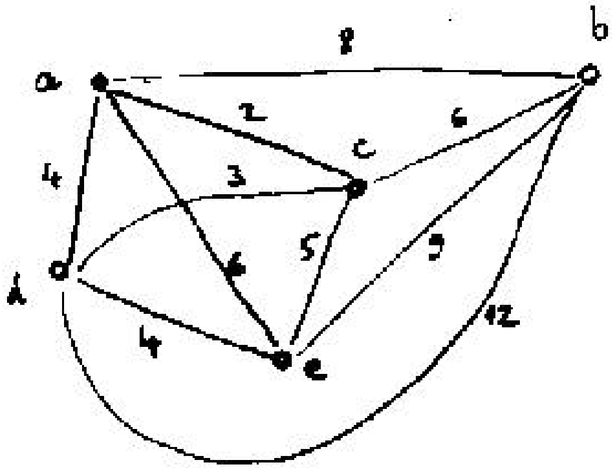
PLACA DE METAL

FUROS





CAMINHO	TEMPO
a, b, c, d, e	21
a, b, d, c, e	28
a, c, b, d, e	24
a, c, d, b, e	26
a, d, b, c, e	27
a, d, c, b, e	22



GRAFO CAPACITAD

PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

→ MENOR CAMINHO COMEÇANDO EM UM VÉRTICE, PASSANDO POR TODOS OS OUTROS E VOLTANDO AO VÉRTICE INICIAL.

(EXATAMENTE UMA VEZ EM CADA VÉRTICE ≠ INICIAL)

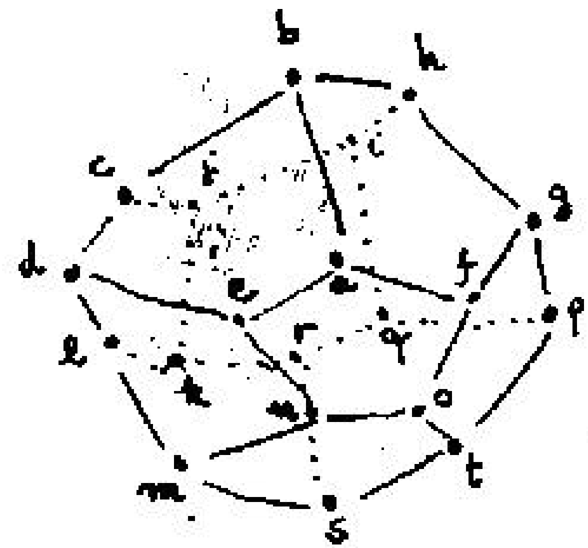
Sir William R. Hamilton (1850)

→ "PUZZLE"

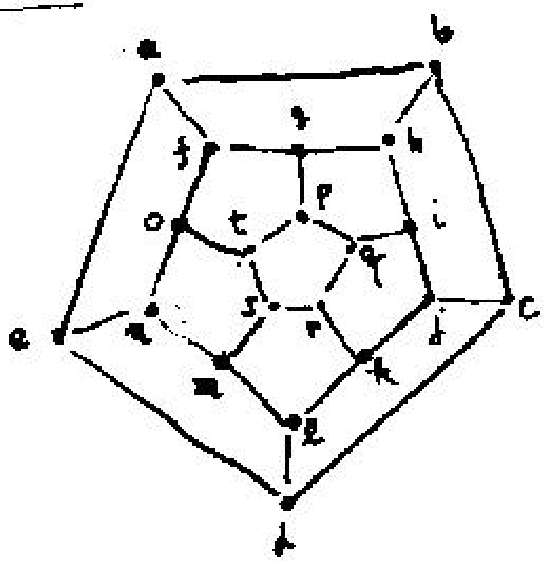
DODECAHEDRO

CIDADES

VIAJANDO → VISITAR CADA CIDADE EXATAMENTE UMA VEZ E VOLTAR A CIDADE INICIAL

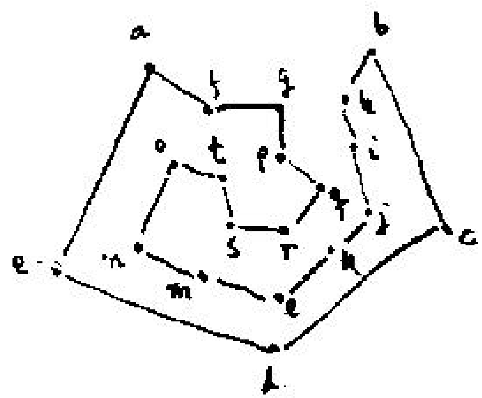


GRAFO



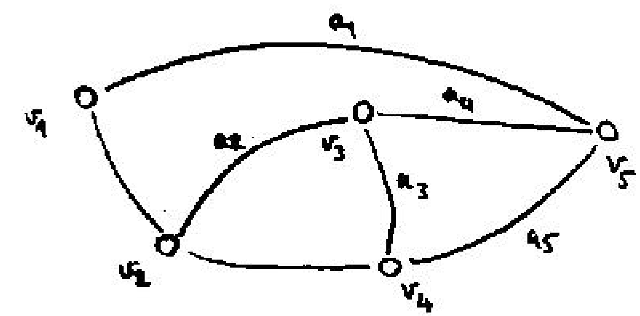
SOLUÇÃO

→ CICLO HAMILTONIANO



GRAFO $G=(V,A)$

É COMPOSTO DE UM CONJUNTO V DE VÉRTICES (OU NÓS) E UM CONJUNTO A DE ARESTAS (OU ARCOS) TAL QUE A CADA ARESTA $a \in A$ ESTÁ ASSOCIADO UM PAR NÃO ORDENADO DE VÉRTICES.

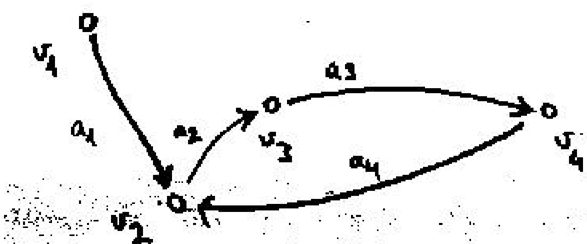


$a_1 = (v_1, v_5)$ $\quad a_2 = (v_2, v_3)$ $\quad a_3 = (v_4, v_3)$

$a_4 = (v_2, v_5)$ $\quad a_5 = (v_4, v_5)$

GRAFO DIRECIONADO:

É COMPOSTO DE UM CONJUNTO V DE VÉRTICES (OU NÓS) E UM CONJUNTO A DE ARESTAS (OU ARCOS) TAL QUE A CADA ARESTA $a \in A$ ESTÁ ASSOCIADO UM PAR ORDENADO DE VÉRTICES.

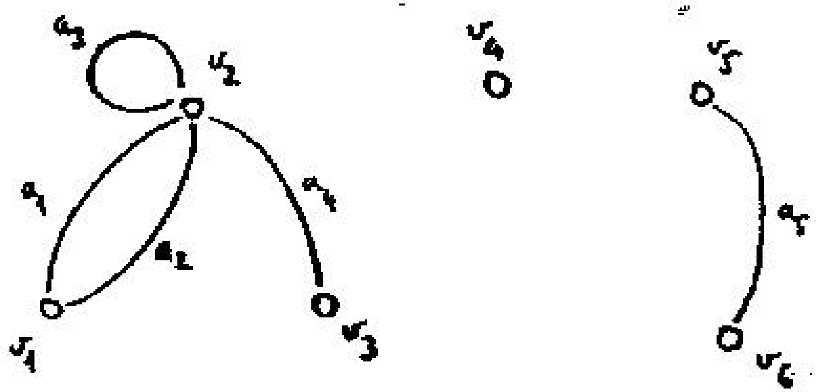


$a_1 = (v_1, v_2)$

$a_2 = (v_2, v_3)$

$a_3 = (v_3, v_4)$

$a_4 = (v_4, v_2)$



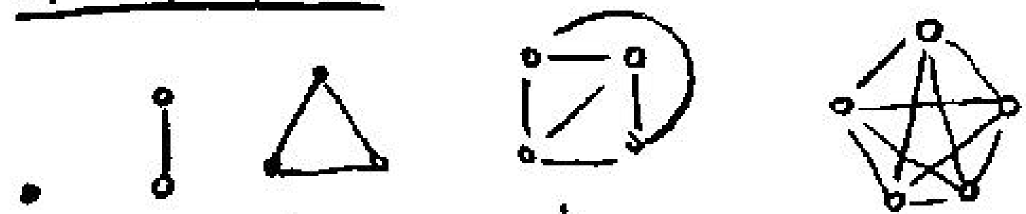
a_1 e a_2 ARESTAS PARALELAS

a_3 LOOP

v_4 VÉRTICE ISOLADO

GRAFO SIMPLES: NÃO CONTÉM LOOPS
NEM ARESTAS PARALELAS

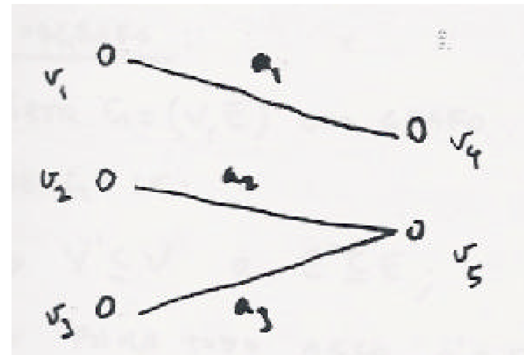
GRAFO COMPLETO:



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

CADA VÉRTICE É CONECTADO A TODOS OS VÉRTICES (OUTROS)

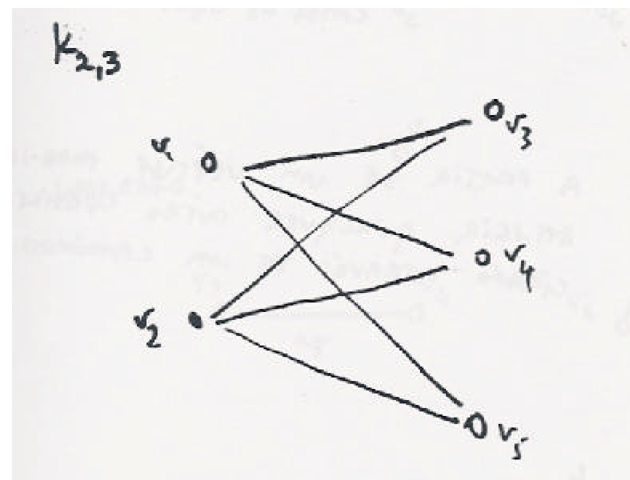
GRAFO BIPARTIDO: VÉRTICES PODEM SER PARTICIONADOS EM DOIS CONJUNTOS DISJUNTOS V_1 E V_2, ONDE CADA ARESTA INCIDENTE EM UM VÉRTICE DE V_1 E UM VÉRTICE DE V_2.



GRAFO BIPARTIDO COMPLETO: (m E n VÉRTICES)

V_1 m VÉRTICES
V_2 n VÉRTICES

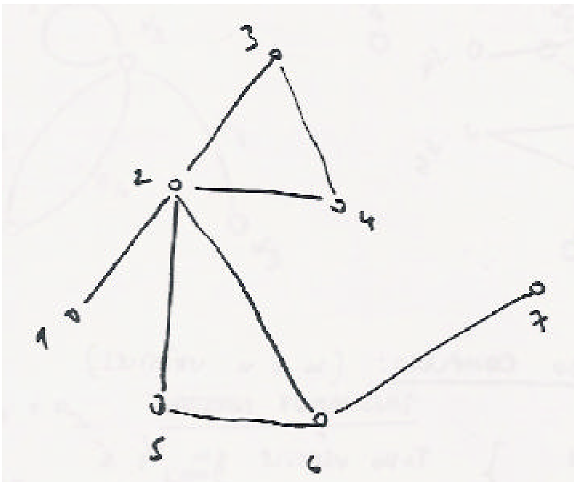
TODO VÉRTICE EM V_1 É CONECTADO A CADA VÉRTICE EM V_2



CAMINHO: UM CAMINHO DE v_1 A v_n DE TAMANHO n É UMA SEQUÊNCIA DE $n+1$ VÉRTICES, COMEÇANDO EM v_0 E TERMINANDO EM v_n,

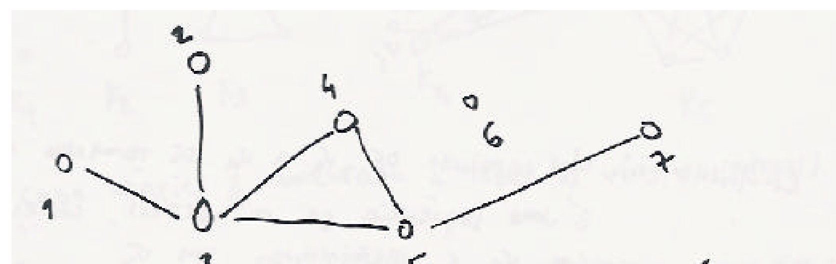
$$(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$$

TAL QUE EXISTA ARESTAS ENTRE OS VÉRTICES CONSECUTIVOS (PARES).



(1, 2, 3, 4, 2) CAMINHO DE TAMANHO 4 ENTRE OS VÉRTICES 1 E 2.

GRAFO CONEXO: A PARTIR DE UM VÉRTICE PODE-SE ATINGIR QUALQUER OUTRO VÉRTICE DO GRAFO ATRAVÉS DE UM CAMINHO.



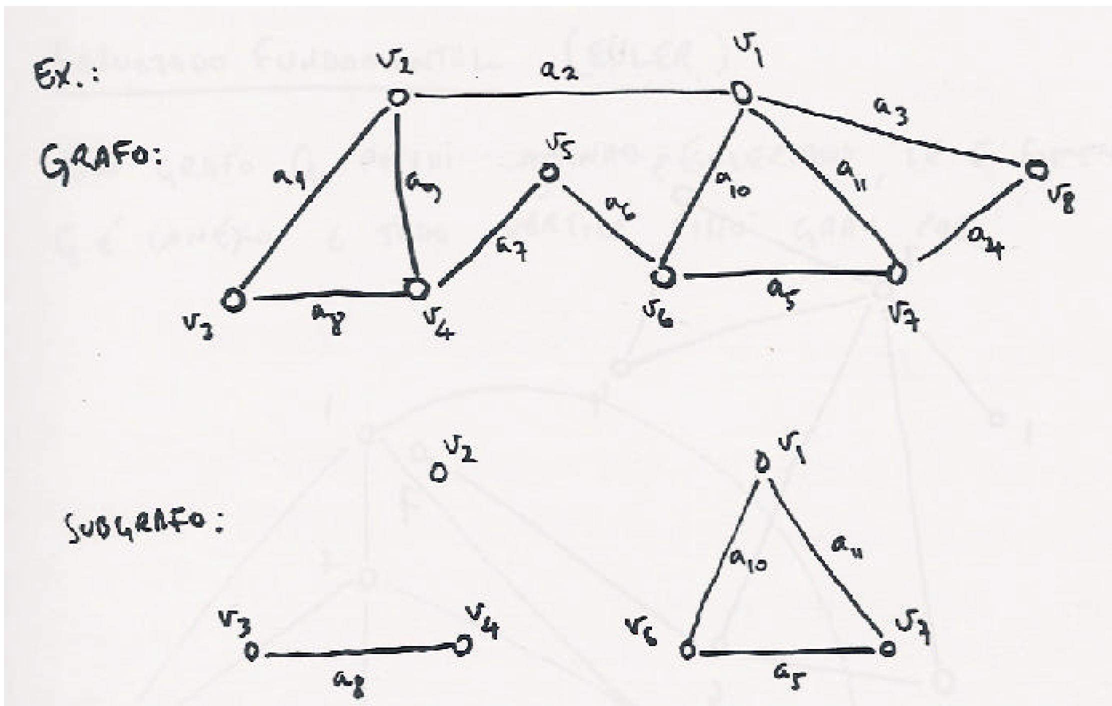
NÃO É CONEXO.

SUBGRAFO :

SEJA $G=(V,E)$ UM GRAFO. $G'=(V',E')$ É UM SUBGRAFO DE G SE:

→ $V' \subseteq V$ E $E' \subseteq E$;

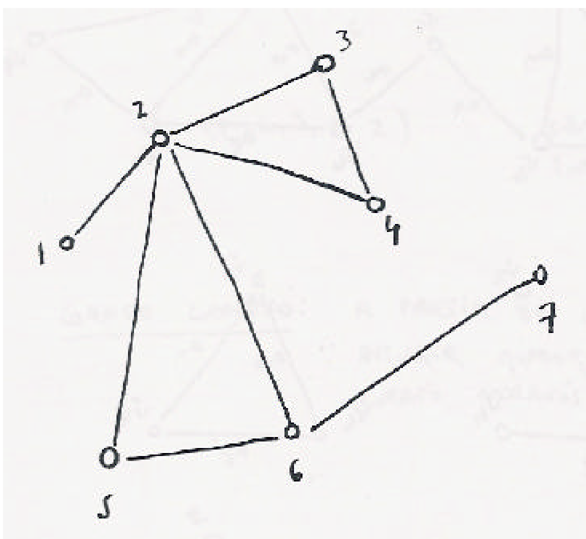
→ PARA TODO ARCO $a' \in E'$, SE a' É INCIDENTE EM v' E w' ENTÃO $v', w' \in V'$.



<u>CAMINHOS</u>: DADOS GRAFO G E DOIS VÉRTICES v E w.

<u>CAMINHO SIMPLES</u> DE v ATÉ w É UM CAMINHO SEM VÉRTICES REPETIDOS.

<u>CICLO (OU CIRCUITO)</u> É UM CAMINHO DE v ATÉ v SEM REPETIÇÃO DE VÉRTICES.
CAMINHO SIMPLES DE v ATÉ v.



(6,5,2,4,3,2,1) $\rightsquigarrow$ CAMINHO DE 6 A 1

(6,5,2,4) $\rightsquigarrow$ CAMINHO SIMPLES

(2,6,5,2,4,3,2) $\rightarrow$ CAMINHO

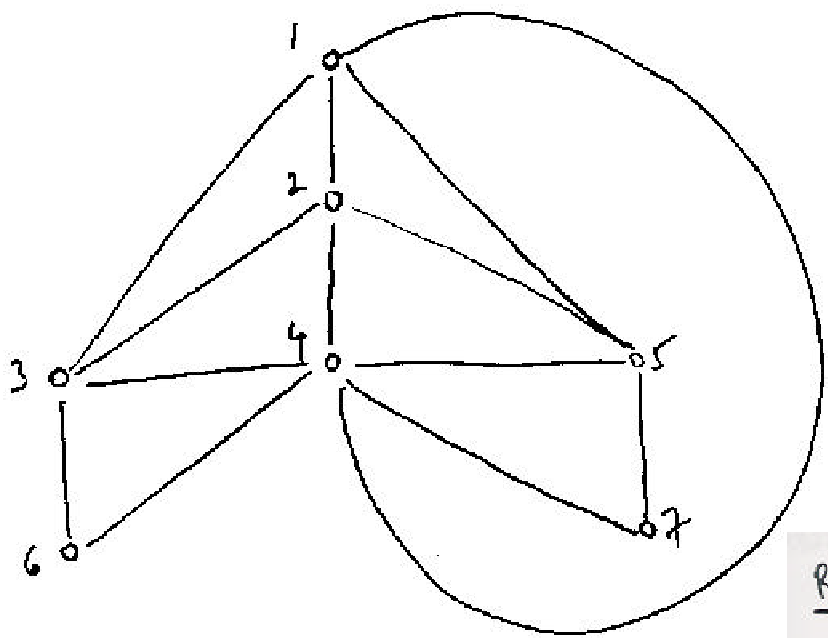
(5,6,2,5) $\rightsquigarrow$ CICLO

(7) $\rightsquigarrow$ CAMINHO SIMPLES

CAMINHO EULERIANO

CAMINHO QUE INICIANDO EM UM VÉRTICE DE DETERMINADO GRAFO, PASSA POR TODAS AS ARESTAS DO GRAFO EXATAMENTE UMA VEZ E RETORNA AO VÉRTICE DE PARTIDA.

GRAU DE UM VÉRTICE: NÚMERO DE ARESTAS INCIDENTES NO VÉRTICE.



(6, 4, 7, 5, 1, 3, 4, 1, 2, 5, 4, 2, 3, 6)

RESULTADO FUNDAMENTAL (EULER)

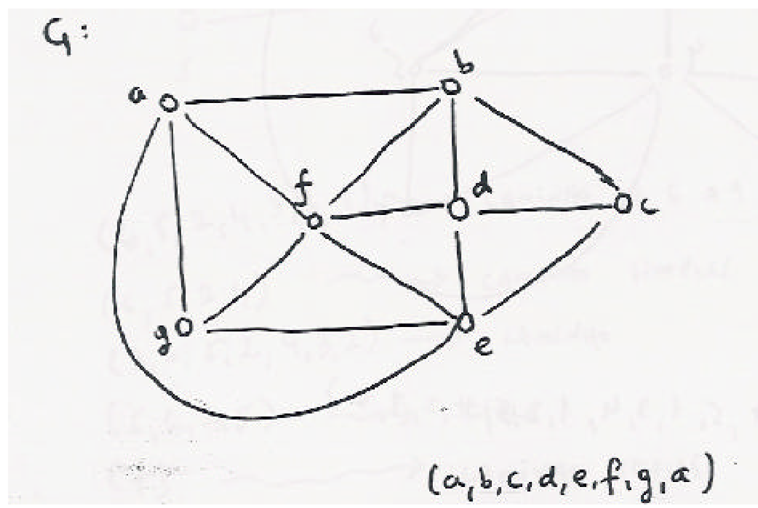
UM GRAFO G POSSUI CAMINHO EULERIANO, SE E SOMENTE SE, G É CONEXO E TODO VÉRTICE POSSUI GRAU PAR.

OUTROS RESULTADOS:

- A soma dos graus de todos os vértices de um grafo é par.
- Em qualquer grafo existe um número par de vértices de grau ímpar.
- Um grafo possui um caminho sem arestas repetidas de v até w (v ≠ w) contendo todos os vértices e arestas, se e somente se, ele é conexo e v e w são os únicos vértices de grau ímpar.

CICLO HAMILTONIANO (HAMILTON 1805-1865)

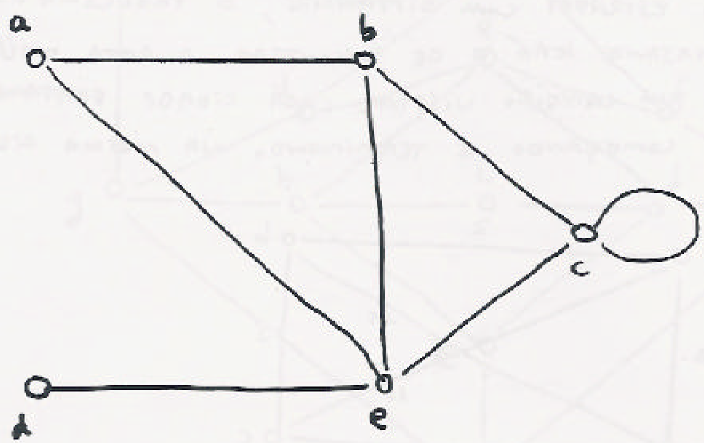
Ciclo no grafo G, que contém cada vértice exatamente uma vez (somente o vértice inicial será igual ao final)



Representação de Grafos

Estrutura de dados:

Matriz de Adjacências



$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\
\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

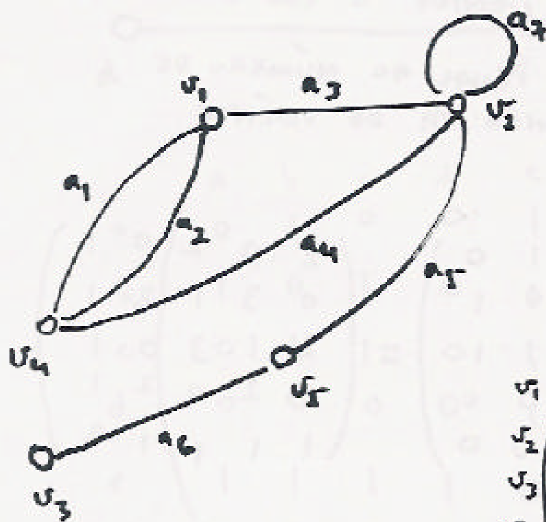
– Grau de cada vértice é igual a soma por linha ou coluna.

– Não é uma representação muito eficiente:

matriz simétrica

arestas paralelas não podem ser representadas.

Matriz de incidências



$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \left(\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right)
\end{array}$$

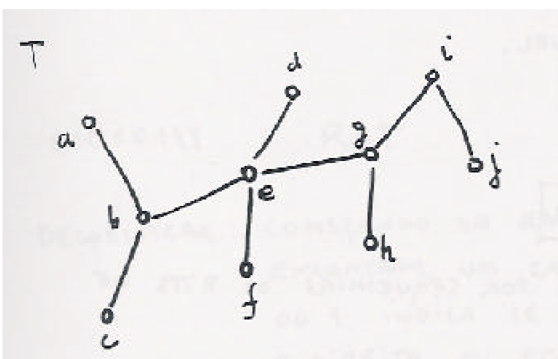
- Permite representar arestas paralelos
- Para o grafo sem "loops" cada coluna possui 2 números 1

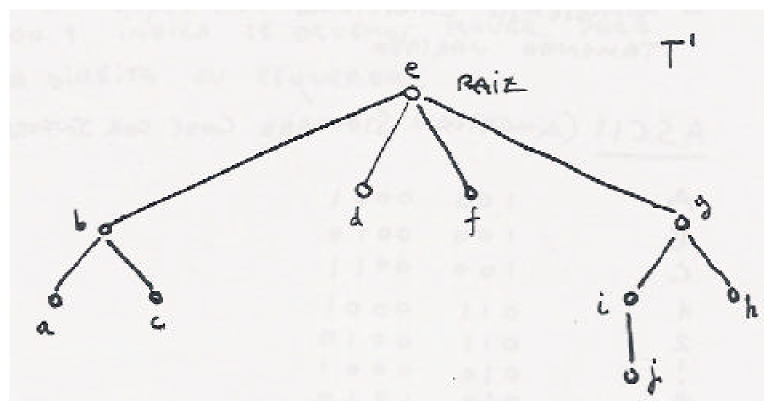
E: a soma da linha nos dá o grau do vértice.

ÁRVORES

DEFINIÇÃO: UMA <u>ÁRVORE</u> T É UM GRAFO SATISFAZENDO: SE v E w SÃO VÉRTICES DE T, EXISTE UM ÚNICO CAMINHO SIMPLES DE v ATÉ w.

UMA <u>ÁRVORE COM RAIZ</u> É UMA ÁRVORE COM UM VÉRTICE PARTICULAR DESIGNADO COMO RAIZ.





SEJA T UM GRAFO COM n VÉRTICES. AS SEGUINTES AFIRMAÇÕES SÃO EQUIVALENTES:

(a) T É UMA ÁRVORE

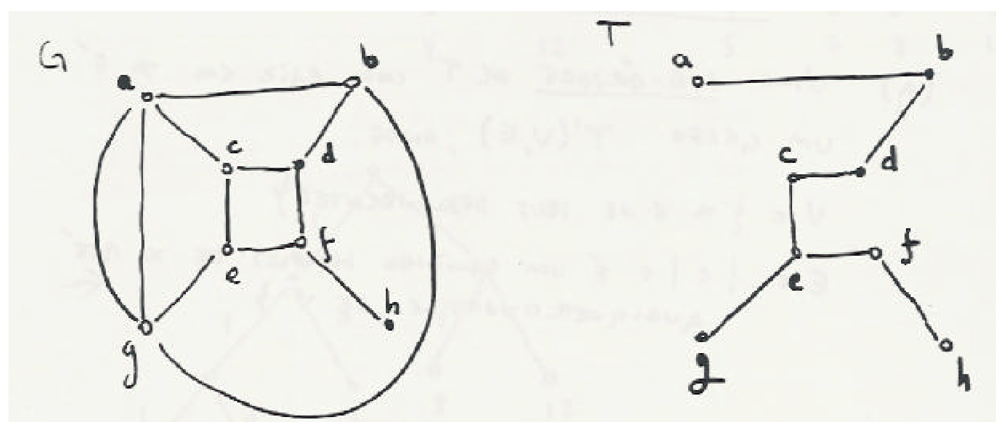
(b) T É CONEXO E NÃO CONTÉM CICLOS

(c) T É CONEXO E POSSUI [redacted] $n-1$ ARCOS

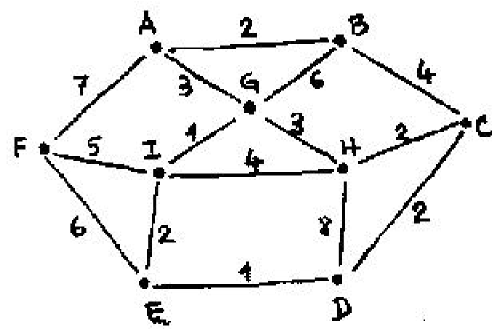
(d) T NÃO CONTÉM CICLOS E POSSUI $n-1$ ARCOS

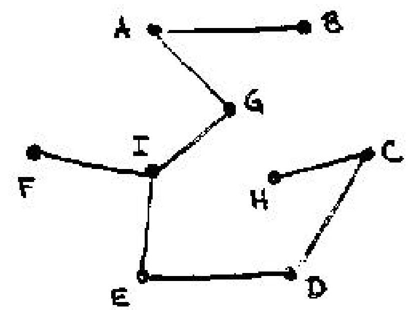
DEFINIÇÃO: <u>ÁRVORE GERADORA</u>

UMA ÁRVORE T É UMA ÁRVORE GERADORA DO GRAFO G SE T É UM SUBGRAFO DE G QUE CONTÉM TODOS OS VÉRTICES DE G



ÁRVORE GERADORA MÍNIMA: ÁRVORE GERADORA DE PESO TOTAL MÍNIMO.





APLICAÇÕES: MODO MAIS BARATO DE CONECTAR:

→ CIDADES por ESTRADAS

TERMINAIS ELÉTRICOS por FIOS

COMPUTADORES por LINHAS (TELEFÔNICAS)

FÁBRICAS por ESTRADAS

$O(|V|^2)$

AG1

Entrada: Conjunto V de vértices

$d_{ij} \rightarrow$ distância entre v_i e $v_j \in V$.

Saída: Árvore Geradora Mínima (V,T)

$U := \{v_1\}$;

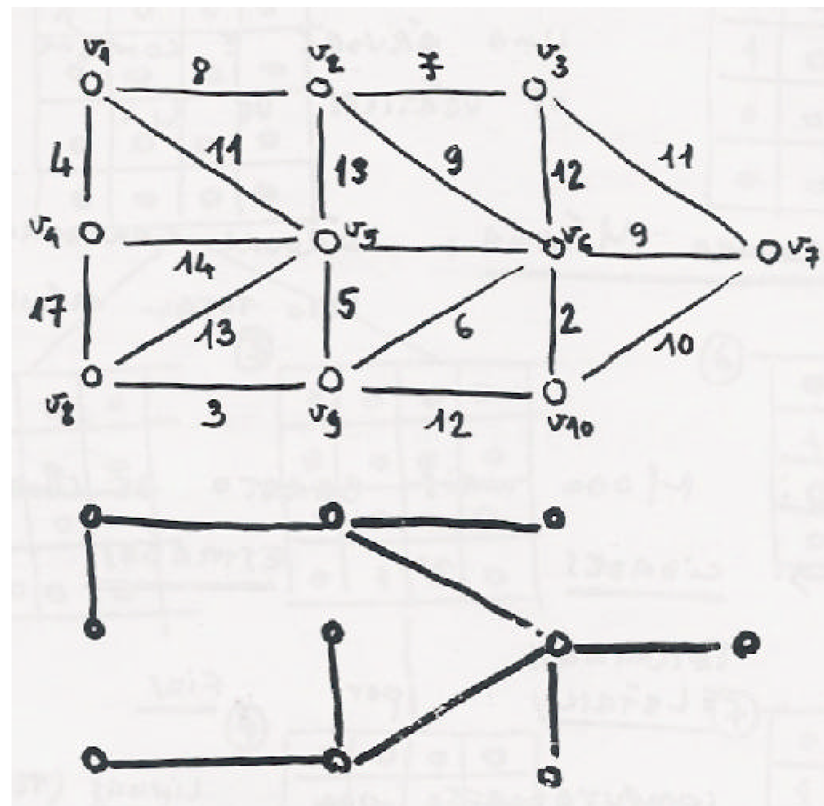
$T := \emptyset$;

Para todo $v \in V - \{v_1\}$ **fazer** próximo$[v] := v_1$;

Enquanto $U \neq V$ **fazer**

- min := ∞;
- **Para todo** $v \in V - U$ **fazer**
  - **se** $d(v$, próximo$[v]) <$ min **então**
    - min := $d(v$, próximo$[v])$;
    - next := v;
  - **fim_se**
- **fim_para**
- $U := U \cup \{next\}$;
- $T := T \cup \{[next,$ próximo$[next]]\}$;
- **Para todo** $v \in V - U$ **fazer**
  - **se** $d(v$, próximo$[v]) > d(v, next)$ **então**
    - próximo$[v]$:= next;
  - **fim_se**
- **fim_para**

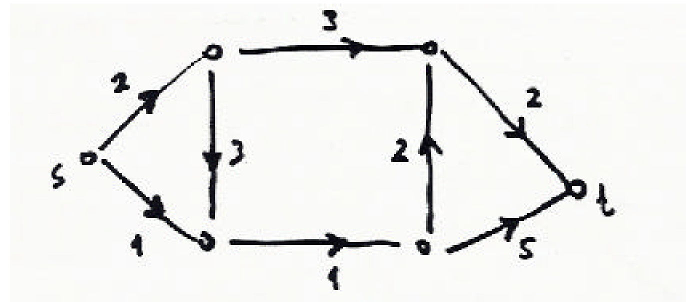
fim_enquanto



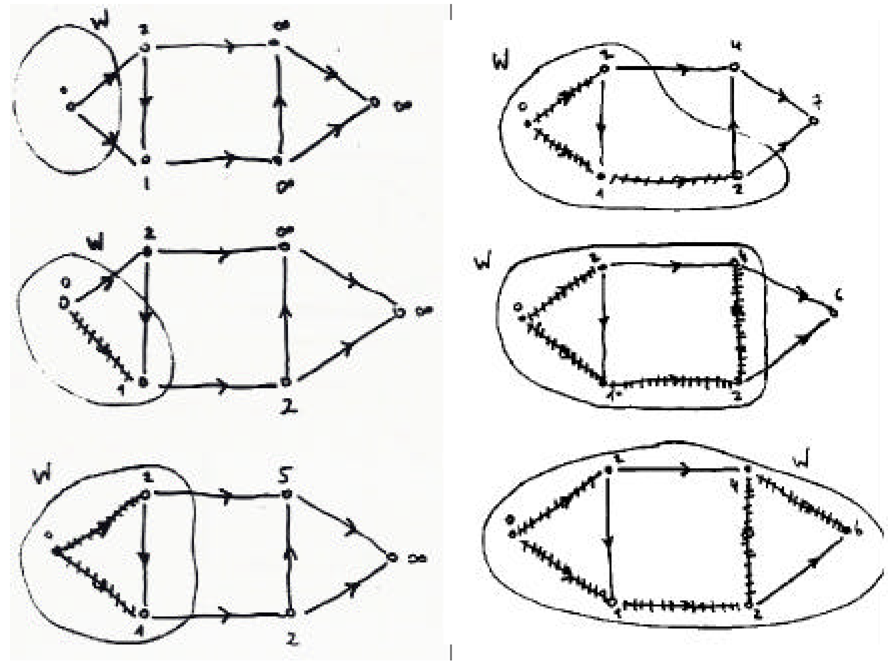
DIJKSTRA

Entrada: Grafo direcionado $D=(V,A)$
custos $c_{uv} \geq 0$ arcos
um nó $s \in V$

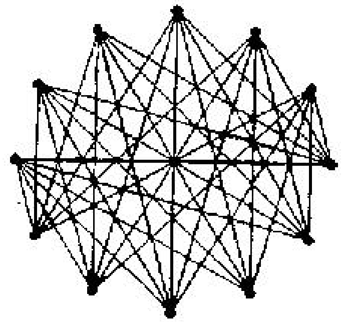
Saída: Caminho Mínimo de s para todo $v \in V$
no array ρ.

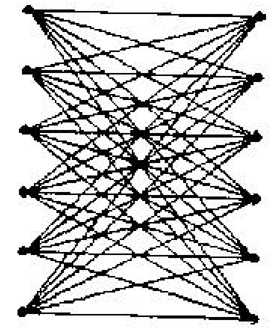


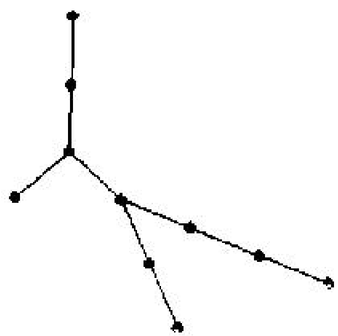
$W := \{s\};$
$\rho[s] := 0;$
Para todo $y \in V - \{s\}$ fazer $\rho[y] := c_{sy}$;
fim_para
Enquanto $W \neq V$ fazer
  Encontre $\rho[x] := \min\{\rho[y] : y \notin W\};$
  $W := W \cup \{x\};$
  Para todo $y \in V - W$ fazer
    $\rho[y] := \min\{\rho[y], \rho[x] + c_{xy}\};$
  fim_para
fim_enquanto



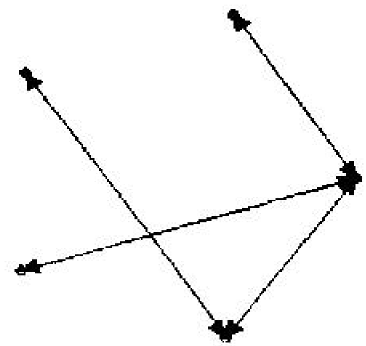
Grafos - resumo



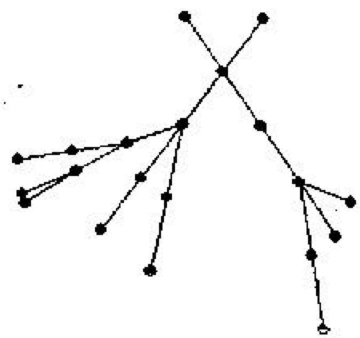




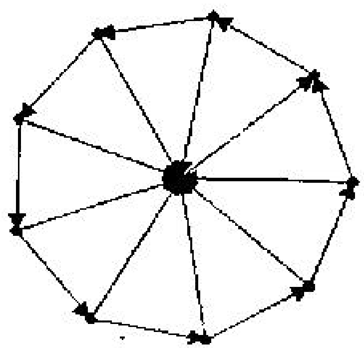
Árvore



Direcionado

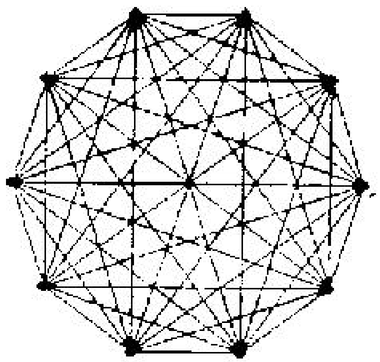


Árvore

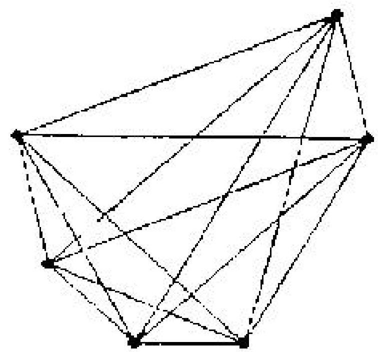


Direcionado (roda)

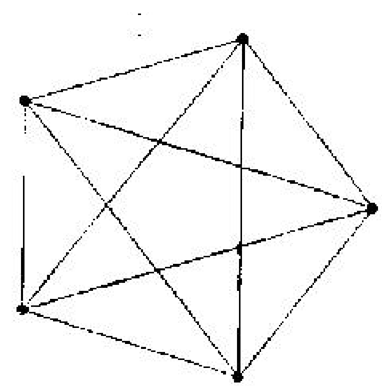
Grafos - resumo



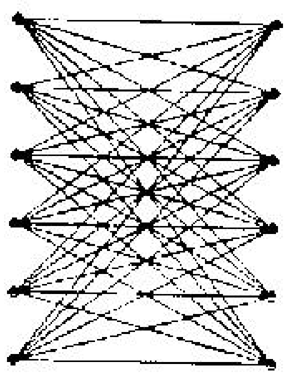
K10



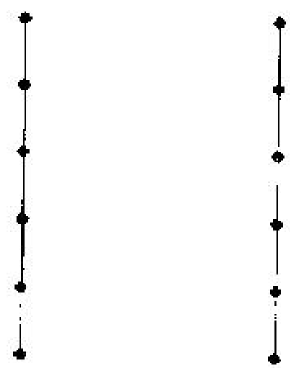
Subgrafo



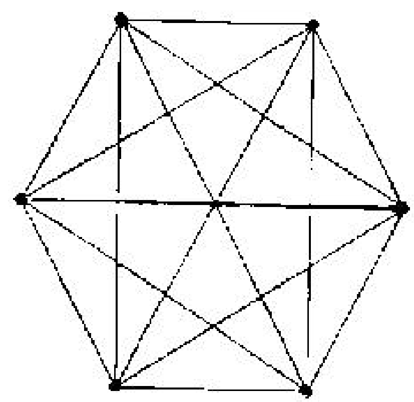
K5



K6,6

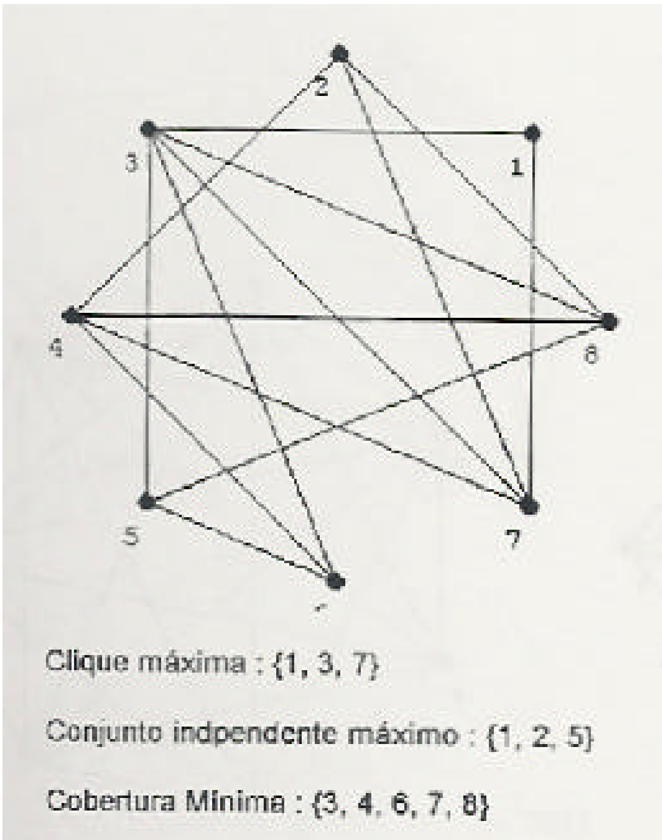


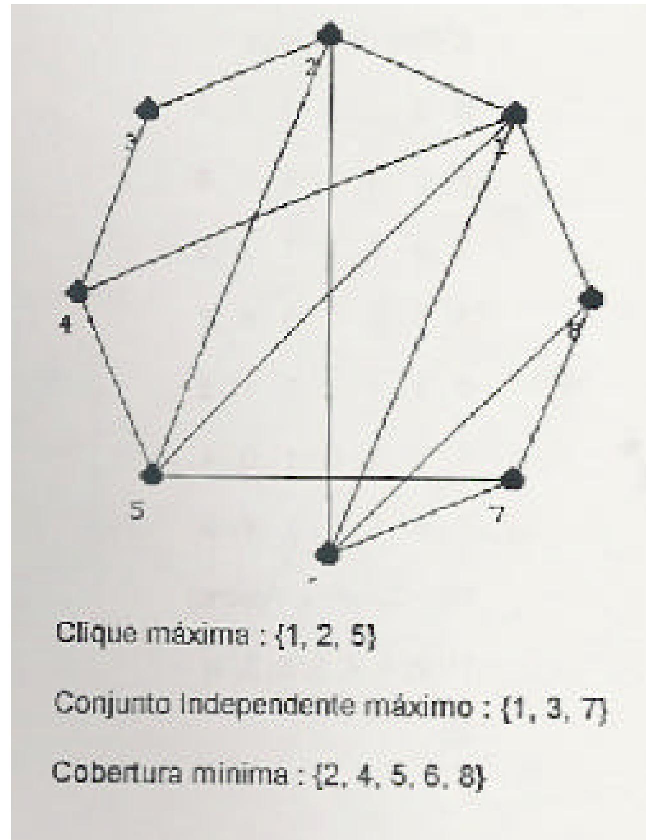
Complementar



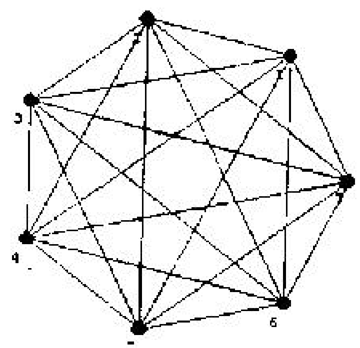
K6

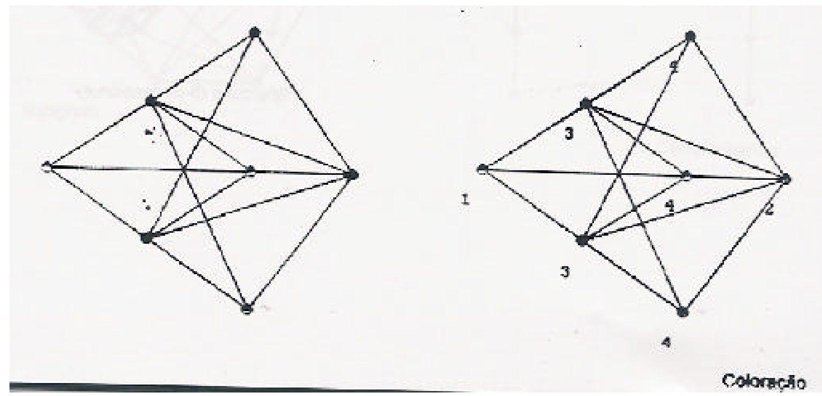
Grafos - resumo





Grafos - resumo





Matriz de custos

0	2	5	3	8	5	7
2	0	9	5	9	6	8
5	9	0	5	1	3	5
3	5	5	0	3	6	2
8	9	[illegible]	3	0	1	5
5	6	3	6	1	0	4
7	8	5	2	5	4	0

Sol. Caixeiro Viajante

{1, 2, 4, 7, 6, 5, 3, 1}

20