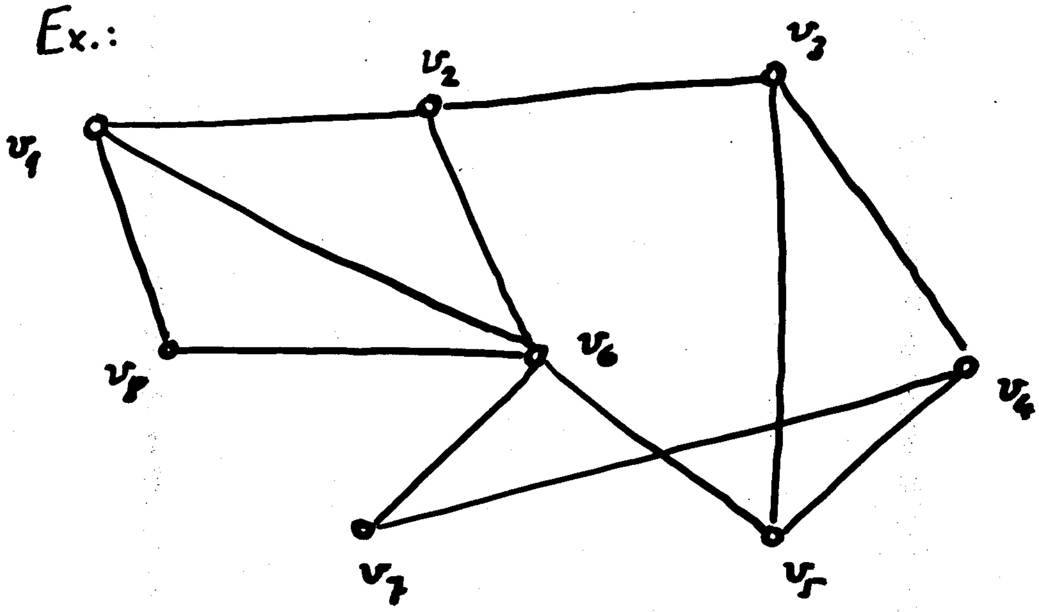
COBERTURA DE CONJUNTOS

Seja grafo $G = (V, \Gamma)$,

$\Gamma : V \to V$ (função de correspondências)

Ex.:



$\Gamma(v_1) = \{v_2, v_6, v_8\}$
$\Gamma(v_2) = \{v_1, v_3, v_6\}$
$\vdots$

$\Gamma\{v_1, v_2\} = \{v_1, v_2, v_3, v_6, v_8\}$

Def.: Um <u>conjunto independente de vértices</u> é um conjunto de vértices de G tal que não existe aresta ligando pares de vértices do conjunto.

$S \subset V$ é um conj. indep. vértices se:

$$S \cap \Gamma(S) = \emptyset.$$

No exemplo: $\{v_7, v_8, v_2\}$, $\{v_3, v_1\}$, $\{v_7, v_8, v_2, v_5\}$, ...

Um conj. indep. vértices é <u>maximal</u> quando

$$S \cap T(S) = \emptyset$$

e $$H \cap T(H) \neq \emptyset \quad , \forall H \supset S$$

No exemplo: $\{v_7, v_8, v_2\}$ não maximal
$\{v_7, v_8, v_2, v_5\}$ maximal

$\{v_1, v_3, v_7\}$
$\{v_4, v_6\}$

Def.: Se Q é a família de conj. indep. vértices então o número

$$\alpha[G] = \max_{S \in Q} |S|$$

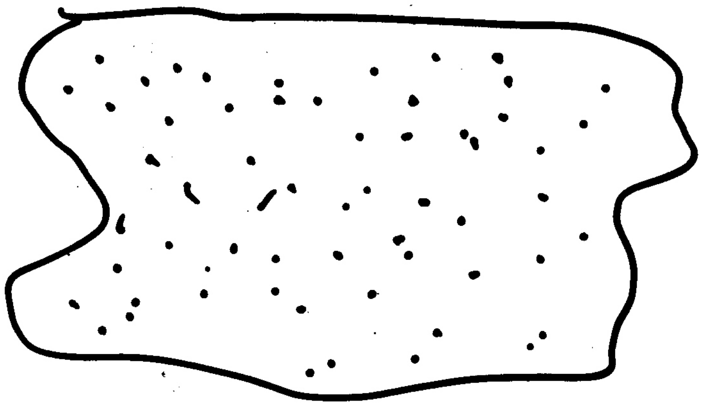
é o <u>número de independência</u> do grafo G, e seja S^* o conjunto que deriva tal número, ele é chamado <u>conjunto indep. de vértices máximo</u>.

No exemplo: Família de conj. indep. maximais

$\{v_8, v_7, v_2, v_5\}$, $\{v_1, v_3, v_7\}$, $\{v_2, v_4, v_8\}$, $\{v_6, v_4\}$, $\{v_7, v_5, v_1\}$, $\{v_1, v_4\}$, $\{v_3, v_7, v_8\}$

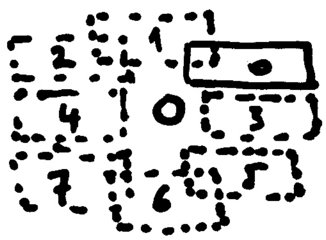
$\alpha[G] = 4$ e $\{v_8, v_7, v_2, v_5\}$ conj. ind. vértices máximo.

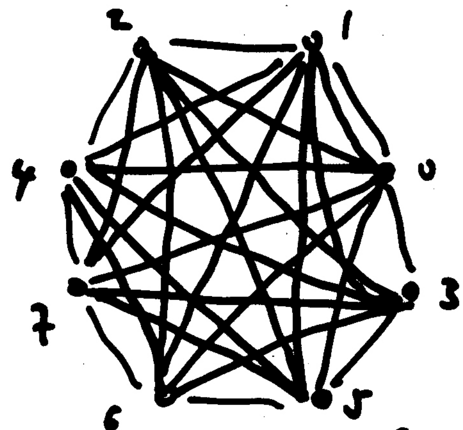
Ex.: Posicionamento automático de labels em mapas



Mapa

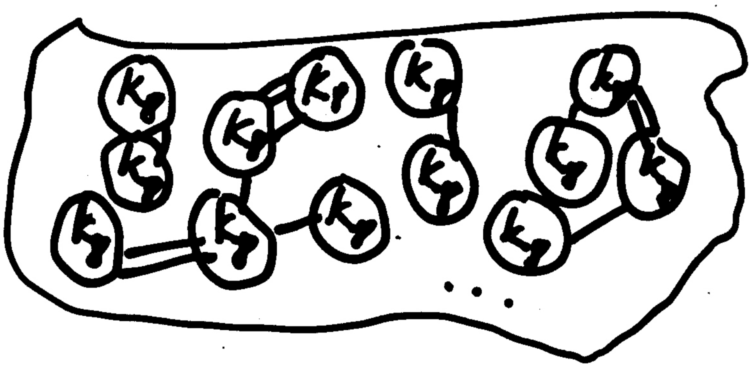
pontos p/ labels





K_8 (Clique)

$\Downarrow$



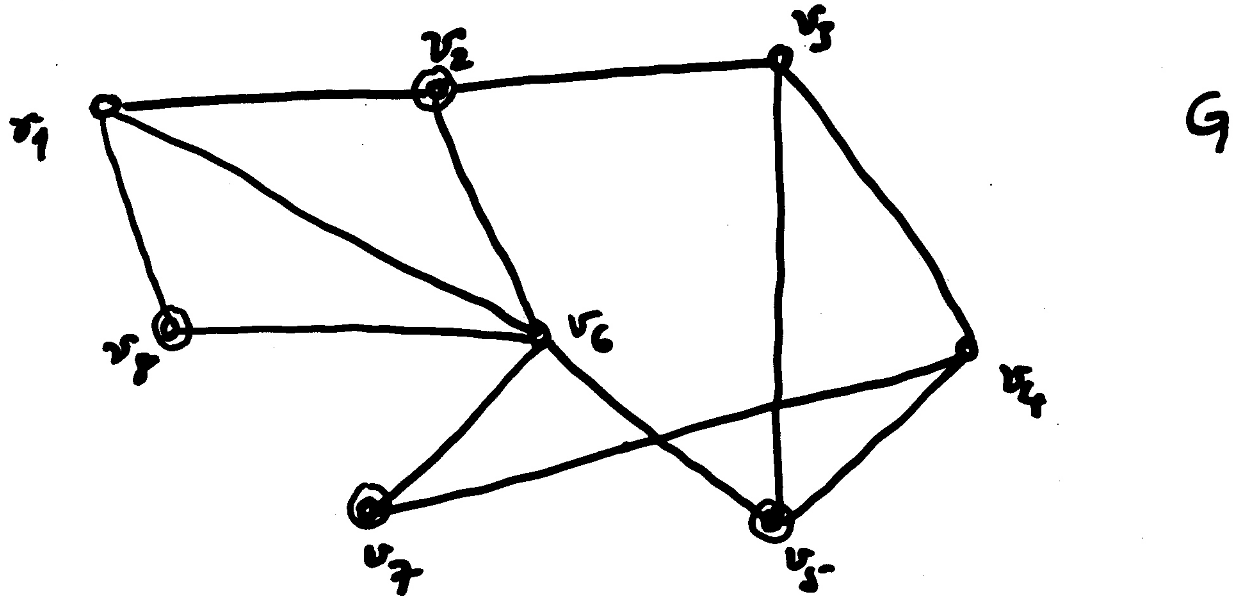
grafo

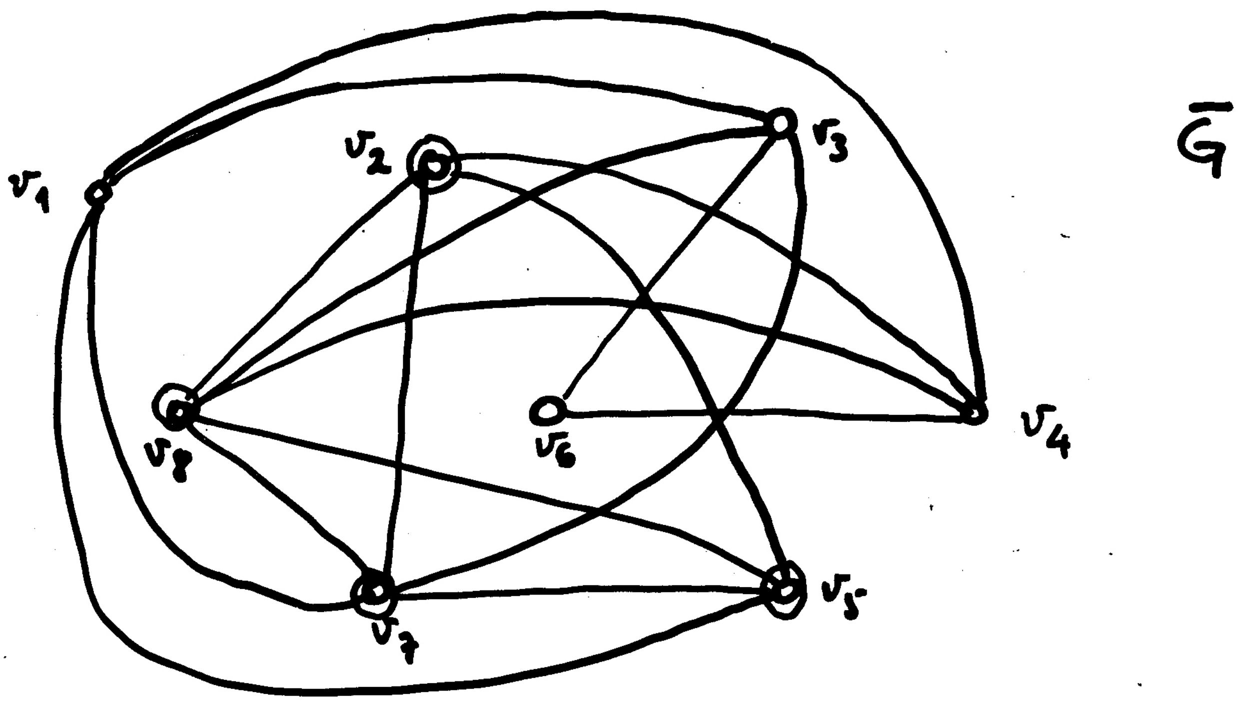
arestas → conflitos

Encontrar conj. ind. vértices de maior cardinalidade.

Ex.: Pallet loading ...

Def.: Subgrafo completo máximo (<u>clique</u>) de G é um subgrafo baseado no conjunto S de vértices que é completo e maximal no sentido de que todo subgrafo de G baseado em $H \supset S$ não é completo.





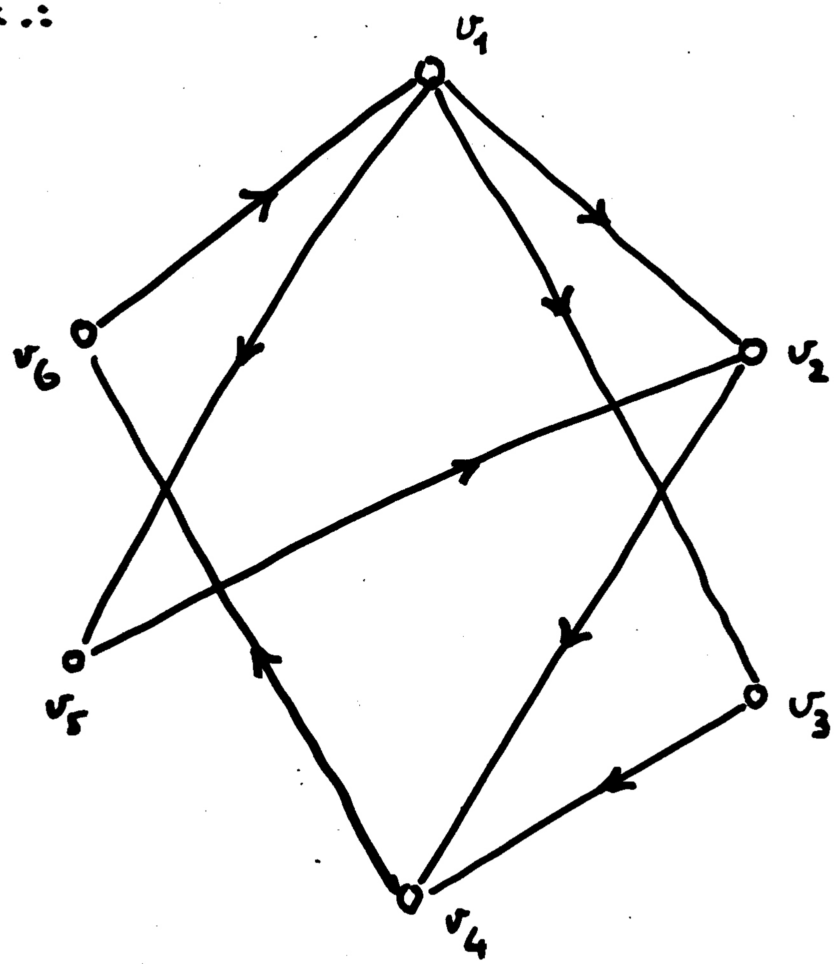
$\{v_8, v_7, v_2, v_5\} \rightarrow$ conj. indep. máximo em G

clique máxima em $\overline{G}$

Def.: Seja um grafo $G = (V, \Gamma)$. Um <u>conjunto dominante de vértices</u>, é um conjunto $S \subseteq V$ tal que para cada vértice $v_j \notin S$ existe um arco de S para v_j.

Ou: $S \cup \Gamma(S) = V$

Ex.:



$\{v_1, v_4, v_6\}$ $\{v_1, v_4\}$ $\{v_3, v_5, v_6\}$ <u>coberturas</u>

$\{v_1, v_4\}$ → conj. dominante mínimo

$$\beta(G) = \min_{S \in P} |S| \quad , \quad P \text{ é de conj. minimais}$$

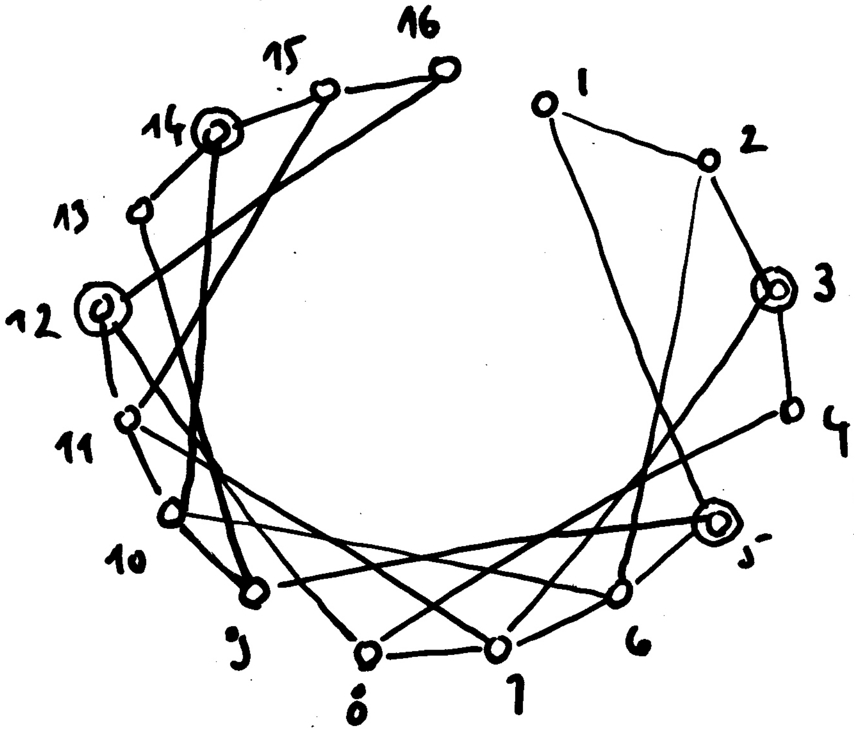
$\therefore \beta(G) = 2$ p/ exemplo
(número de dominância).

Exemplo: Localização de centros para cobrir uma região.

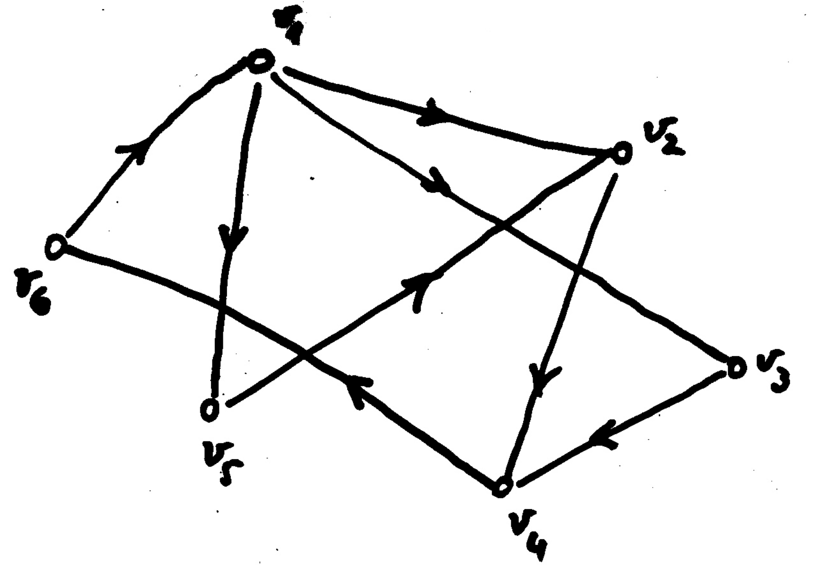
→ Localização de transmissores de TV ou rádio para servir uma área especificada.

→ Localização de postos de forças armadas para cobrir uma região.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16



Ex.:



Matriz de adjacências

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Problema de cobertura de conjuntos

Encontrar o menor número de colunas que cobrem todas as linhas.

Caso geral: Matriz não é quadrada
Custos c_j associados às colunas (vértices)

Aplicações: Escolha de intérpretes
Recuperação de informações
Scheduling de tripulação aérea
Simplificação de expressões lógicas
Roteamento de veículos
...

PCC formulação PL-01

$$\text{Min} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

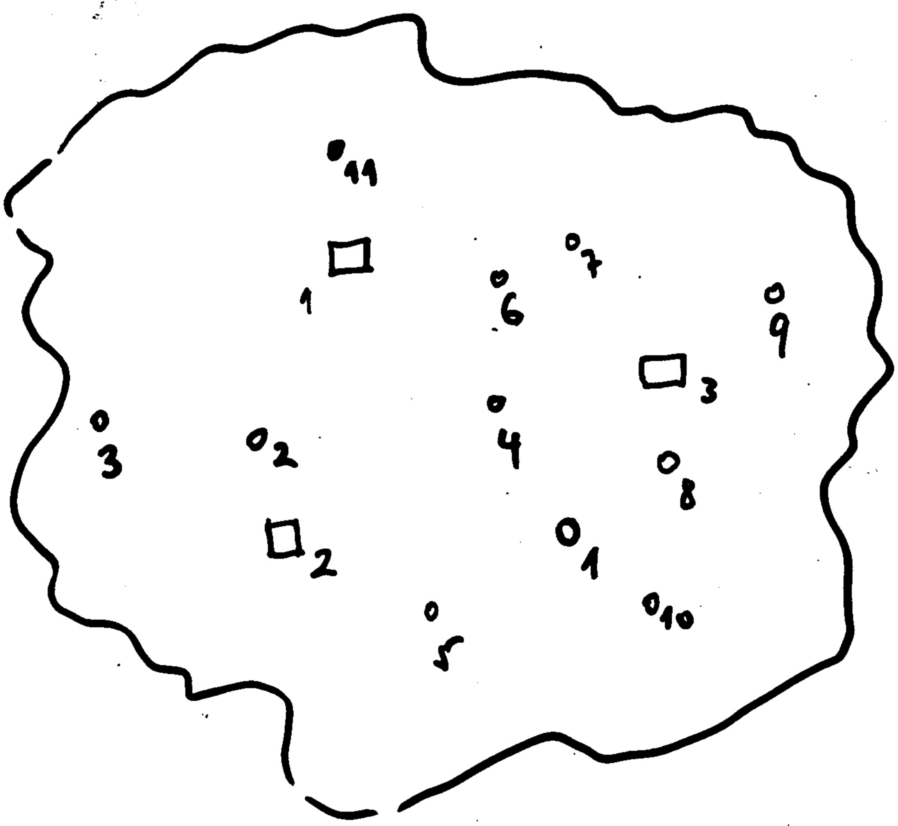
$$\text{suj. a} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \geq 1 \quad ; \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}.$$

onde : $c_j \geq 0$, $a_{ij} \in \{0,1\}$

Se $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1, \quad i = 1, \dots, m$ $\Leftarrow$ P. Particionamento de Conjuntos .

Ex.: Localizar com menor custo centros de atendimento a determinadas regiões : (supondo distância ≤ 20)



□ \ o	1	2	3
1	30	10	5
2	11	8	25
3	31	22	40
4	15	5	8
5	45	11	12
6	8	17	19
7	7	15	25
8	22	8	3
9	31	33	16
10	25	12	4
11	2	55	17

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Reduções</u>: (Notação: $a_i \leftarrow$ i-ésima linha, $a^j \leftarrow$ j-ésima coluna)

(i) Inviabilidade: linha nula $\rightarrow a_i = 0$, algum i

(ii) Inclusão de coluna:

$a_i = e_k$ (k-ésimo vetor unitário)

então $x_k = 1$ em qualquer solução viável.

a_i pode ser excluída.

(iii) Dominância de linhas:

Se $a_p \geq a_q$ para algum par de índices de linha p e q $(p \neq q)$

então a_q pode ser excluída pois toda cobertura de a_p cobre também a_q.

(iv) Coluna nula:

Se a^j é o vetor nulo para algum j, a^j pode ser excluída ($x_j = 0$ em toda sol. viável)

(v) Dominância de colunas:

Se para um conjunto de colunas Π e alguma coluna k,

$$\sum_{j \in \Pi} a^j \geq a^k \text{ e } \sum_{j \in \Pi} c_j \leq c_k ,$$

a^k pode ser removida.

PCC

Heurísticas gulosas:

Notação: $I = \{1, \ldots, m\}$ conj. índices de linha
$J = \{1, \ldots, n\}$ conj. índices de coluna
$P = \{P_1, \ldots, P_n\}$ conj. de subconjuntos onde
$P_j = \{i \in I \mid a_{ij} = 1\}, j \in J.$

J^* é uma cobertura se

$$\bigcup_{j \in J^*} P_j = I .$$

HEURÍSTICA GULOSA:

Faça $J^* = \emptyset$;
<u>Enquanto</u> $P_j \neq \emptyset, \forall j = 1, \ldots, n$ <u>faça</u>
  $k = \max (\text{ou } \min) \{ f(c_j, |P_j|) : 1 \leq j \leq n \}$;
  $J^* = J^* \cup \{k\}$;
  <u>Para</u> $j = 1, \ldots, n$ <u>faça</u>
    $P_j = P_j - P_k$
  <u>fim_para</u>;
<u>fim_enquanto</u>

obs.: $|P_j| =$ cardinalidade do conjunto P_j.

Heurística de Chvátal (1979)

$$f(c_j, |P_j|) = \underbrace{|P_j| / c_j}_{\substack{\text{número de} \\ \text{linhas cobertas} \\ \text{por unidade de custo.}}} \quad (\text{Max.})$$

Heurística de Balas e Ho (1980)

(Mín.) $f(c_j, |P_j|) =$

(1) c_j

(2) $c_j / |P_j|$

(3) $c_j / \log_2 |P_j|$

(4) $c_j / |P_j| . \log_2 |P_j|$

(5) $c_j / |P_j| . \ln |P_j|$

- Faz remoção de colunas redundantes
- Desvio máximo

Nos testes 10,8% ótimo

Heurística de Vasko e Wilson (1984, 1986)

(Min.) $f(c_j, |P_j|) =$

(1) a (5)

(6) $c_j / |P_j|^2$

(7) $c_j^{1/2} / |P_j|^2$

- Faz remoção de colunas redundantes
- Gera aleatóriamente uma das sete funções em cada loop da Heur. gulosa.
- Busca local de uma unidade