CAP254:Otimização Combinatória

Luiz A. N. Lorena

LAC/INPE

lorena@lac.inpe.br

http://www.lac.inpe.br/~lorena

Programa

Formulação de Modelos

Grafos e Complexidade de Algoritmos

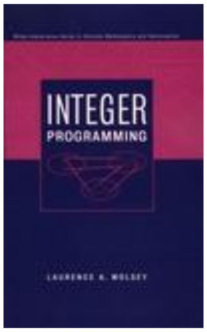
Relaxações e Heurísticas

Branch&Bound

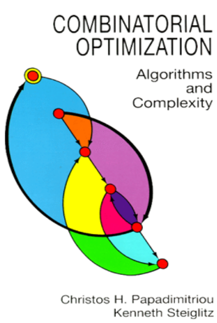
Cortes

Metaheurísticas

Bibliografia:

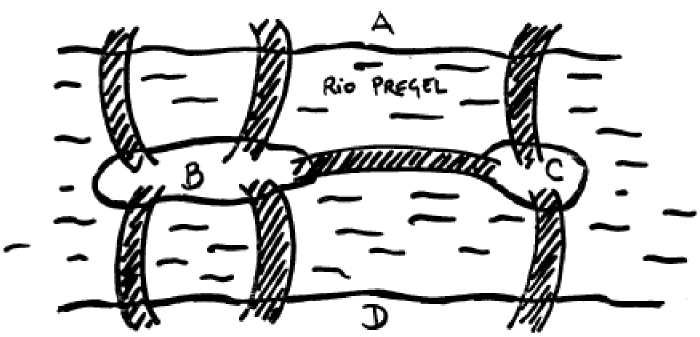


Integer Programming
Laurence A. Wolsey
ISBN: 978-0-471-28366-9
288 pages
September 1998

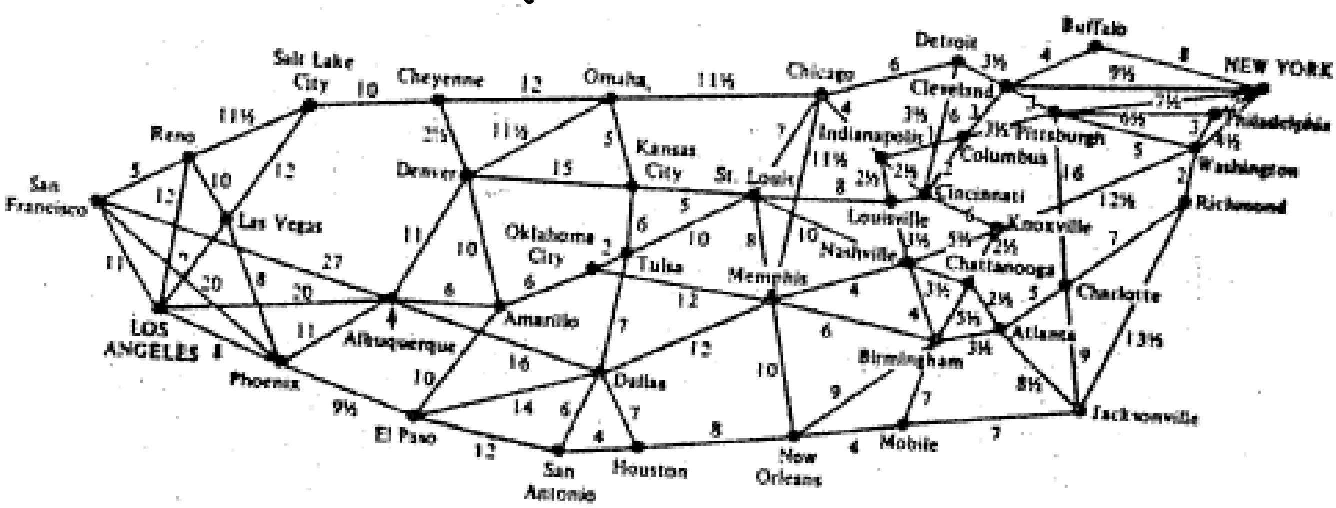


Combinatorial Optimization: algorithms and complexity
Christos H. Papadimitriou, Kenneth Steiglitz.
ISBN 0-486-40258-4
496 pages
1982

Pontes Königsberg



Caminho mínimo / Caixeiro Viajante

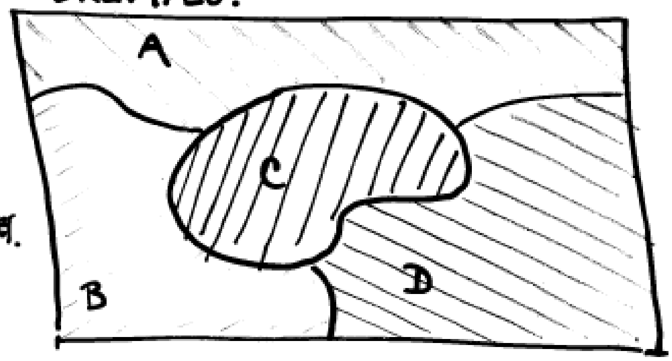


PROBLEMA DAS QUATRO CORES (FORMULADO EM 1852 POR FRANCIS GUTHRIE)

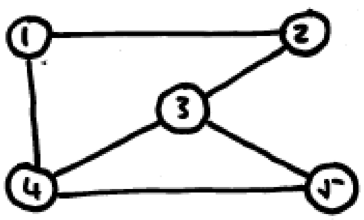
COLORIR OS PAÍSES DE UM MAPA ARBITRÁRIO PLANO, DE FORMA QUE PAÍSES FRONTEIRIÇOS POSSUAM CORES DIFERENTES.

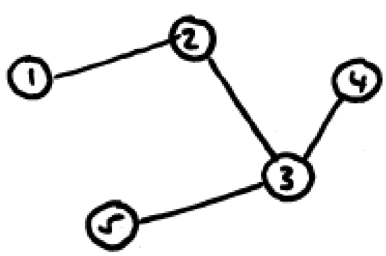
PROBLEMA: OBTER TAL COLORAÇÃO USANDO NÃO MAIS QUE QUATRO CORES.

EXEMPLO:



CAMINHO HAMILTONIANO (HAMILTON





EXISTEM n CIDADES. CADA PAR DE CIDADES PODE SER ADJACENTE OU NÃO, ARBITRARIAMENTE. PARTINDO DE UMA CIDADE QUALQUER, O PROBLEMA CONSISTE EM DETERMINAR UM TRAJETO QUE PASSE EXATAMENTE UMA VEZ EM CADA CIDADE E RETORNE AO PONTO DE PARTIDA, E TAL QUE CADA PAR DE CIDADES CONSECUTIVAS NO TRAJETO SEJA SEMPRE ADJACENTE.

Formulação de Modelos

Programação Linear Inteira

$$\textit{Maximizar} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

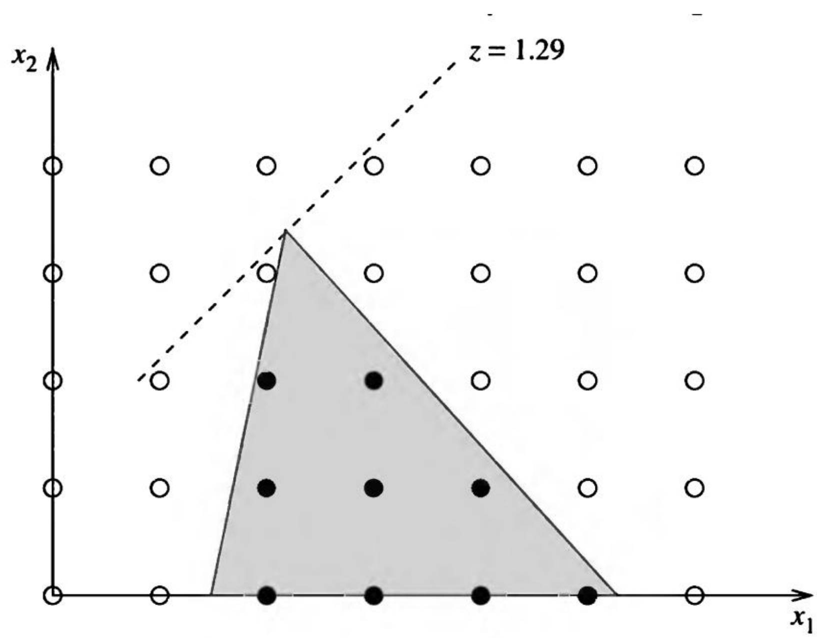
$$\textit{sujeito a} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \; ; i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \in \{0,1\}, \; j = 1, \ldots n$$

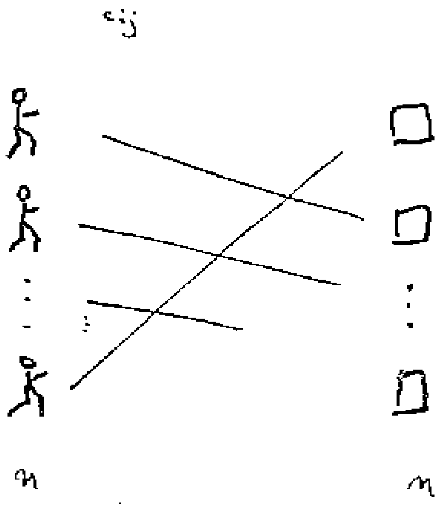
- Introduzido em 1951 (Dantzig)
- Caixeiro viajante – caso especial em 1954 (Dantzig)
- Primeiro algoritmo exato em 1958 (Gomory)
- Técnica Branch-and-Bound 1960 (Land and Doig)

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
&\max \; -x_1 + x_2 \\
&\quad \text{subject to:} \\
&\qquad 12x_1 + 11x_2 \leq 63 \\
&\qquad -22x_1 + 4x_2 \leq -33 \\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0 \\
&\qquad x_1, x_2 \in \mathbf{Z}
\end{aligned}
$$



Problema de atribuição:



$$\text{Minimizar} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{suj. a} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1; \quad i = 1,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1; \quad j = 1,\ldots,n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i, \forall j$$

Fácil solução

Kuhn (1955)

Hungarian Method

Problema de Atribuição Generalizado:

$$Max \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$suj.\,a \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1; \qquad j = 1,\ldots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \le b_i\,; \quad i = 1,\ldots,n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall i, \forall j$$

Onde:

{1,...,n} = conjunto de tarefas a serem atribuídas

{1,...,m} = conjunto de agentes disponíveis

c_{ij} = retorno atribuído se o agente i executa a tarefa j

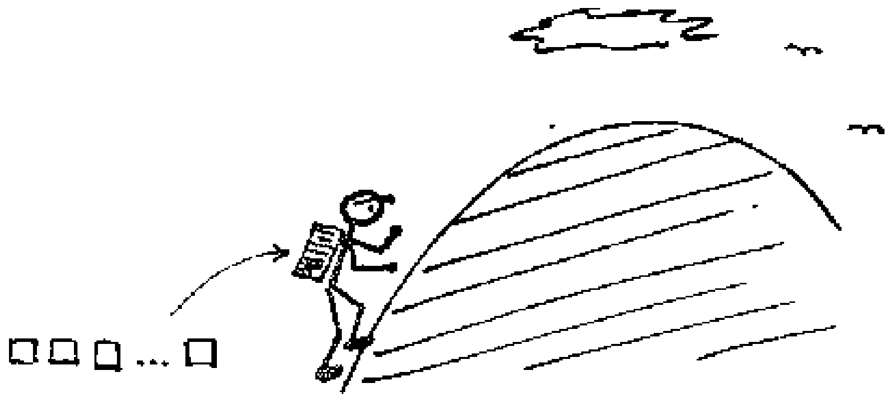
b_i = disponibilidade de recursos para o agente i

a_{ij} = recurso requerido pelo agente i para executar a tarefa j

x_{ij} = 1, se o agente i executa a tarefa j

0, caso contrário

PROBLEMA DA MOCHILA



Maximizar $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

Sujeito a $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$

$x_j \geq 0$ e inteiro, $j = 1, \ldots, n$.

sendo n, b, c_j e a_j inteiros positivos satisf. $a_j \leq b$, $\forall j$.

onde:

b = peso máximo

c_i = utilidade do ítem i

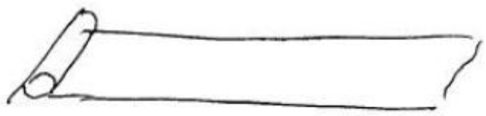
a_i = peso do ítem i

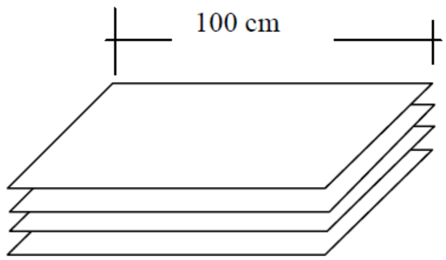
x_i = 1 se o ítem i é selecionado,
0 caso contrário

Este problema é NP-hard.

— CORTES ESTOQUES — unidimensional

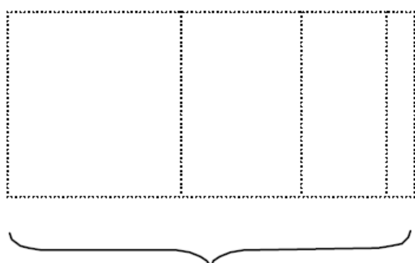
gilmore & Gomory
1965





Objetivo: cortar o menor número de chapas de comprimento 100 cm, usando padrões de corte para modo a satisfazer a seguinte demanda de peças:

Tipo	Comprimento da peça	demanda
1	45cm	60
2	30cm	88
3	20cm	35
4	15cm	110
5	5cm	200



$$\text{Minimize} \quad x1 + x2 + x3 + \ldots$$

$$\text{st} \quad \left.\begin{array}{l} \boxed{1}\, x1 + \boxed{2}\, x2 + \boxed{0}\, x3 + \ldots >= 60 \\ \boxed{1}\, x1 + \boxed{0}\, x2 + \boxed{3}\, x3 + \ldots >= 88 \\ \boxed{1}\, x1 + \boxed{0}\, x2 + \boxed{0}\, x3 + \ldots >= 35 \\ \boxed{0}\, x1 + \boxed{0}\, x2 + \boxed{0}\, x3 + \ldots >= 110 \\ \boxed{1}\, x1 + \boxed{2}\, x2 + \boxed{3}\, x3 + \ldots >= 200 \end{array}\right\} \text{Tipos}$$

com $\quad 0 <= xi <= \infty$

$\quad\quad$ xi inteiro

Forma relaxada do problema (mestre)
(removendo a condição das variáveis serem inteiras)

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$\text{Sujeito a} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad i = 1, 2, \ldots 5$$

$$x_j \geq 0$$

Problema da mochila para gerar novas colunas:

$$\text{Max} \quad z = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i$$

$$\text{Sujeito a} \quad \sum_{i=1}^{r} c_i y_i \leq C$$

$$y_i \geq 0 \quad \text{, inteiros}$$

ci é o tamanho de cada tipo de peça
λi são os valores duais do problema mestre
C é o tamanho máximo dos padrões (100)
Se (1 – z) < 0 uma nova coluna formada pelos yi entra no problema mestre

```
Minimize   x1 +   x2 +   x3 +  . . .

st       1 x1 + 2 x2 + 0 x3 + . . . >= 60
         1 x1 + 0 x2 + 3 x3 + . . . >= 88
         1 x1 + 0 x2 + 0 x3 + . . . >= 35
         0 x1 + 0 x2 + 0 x3 + . . . >= 110
         1 x1 + 2 x2 + 3 x3 + . . . >= 200
```

com $0 <= xi <= \infty$
xi inteiro

```
Minimize
 obj: x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 + x14
 + x15 + x16 + x17 + x18 + x19 + x20 + x21 + x22 + x23 + x24 + x25
Subject To
 c1: x1 + x7 + x11 + x12 + x13 + 2 x14 + x17 + x18 + x20 + 2 x24 >= 60
 c2: x2 + x6 + 2 x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 + x15 + x16 + x17 + x18 + x19
     + 3 x23 >= 88
 c3: x3 + 3 x6 + x8 + x9 + x15 + 3 x16 + x20 + 5 x25 >= 35
 c4: x4 + x7 + 2 x9 + x10 + x11 + x12 + x15 + x17 + 3 x19 + 6 x22 >= 110
 c5: x5 + x6 + x7 + 2 x8 + 3 x9 + 3 x10 + x12 + x15 + x18 + x19 + 2 x20
     + 20 x21 + 2 x22 + 2 x23 + 2 x24 >= 200
End
```

Solução final

x21	x22	x23	x24	x25	
2.23	18.33	29.33	30	7	
0	0	0	2	0	60
0	0	3	0	0	87.9
0	0	0	0	5	35
0	6	0	0	0	109.9
20	2	2	2	0	199.9

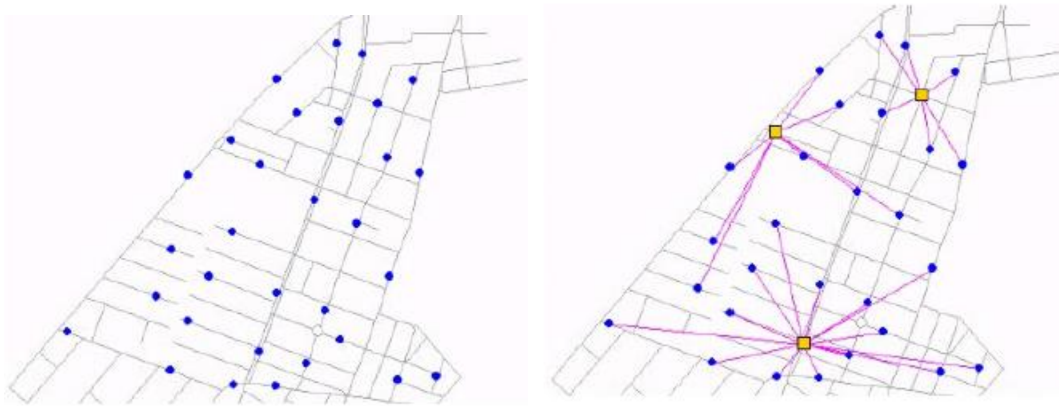
Localização de facilidades

LOCATION PLANNING 1167[1]

June 15, 1967: 800 years ago, Bishop Absalon employed a heuristic location procedure to determine the optimal location when Copenhagen was founded.

"Your Reverence must be kidding! Should our capital really be located in such a ridiculous place?"

p-Medianas



$$Min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij}$$

$$suj.\, a \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1; \quad j = 1,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ii} = p$$

$$x_{ij} \le x_{ii}\ ; \quad i, j = 1,\ldots,n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}; \quad i, j = 1,\ldots,n$$

d_{ij} = distâncias
x_{ij} = alocações
p = número de medianas
n = número total de nós na rede

p-Medianas
(formulação 2)

$$Min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{q=1}^{p} d_{ij} y_{ijq}$$

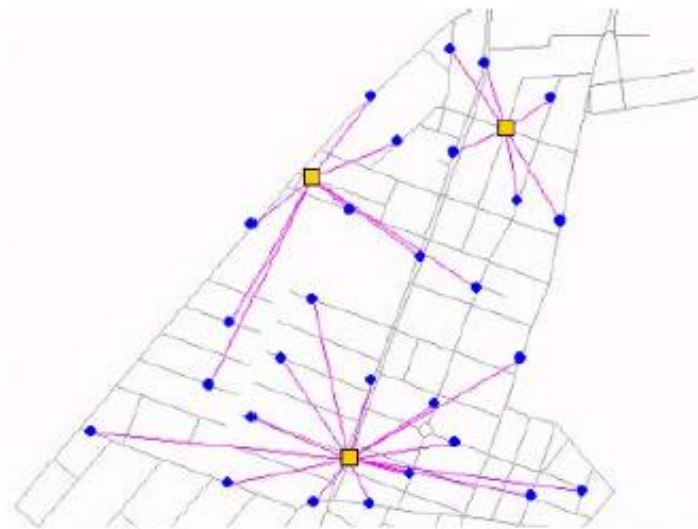
$$suj.a \quad \sum_{q=1}^{p} v_{iq} = 1; \quad i = 1,\ldots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} u_{jq} = 1; \quad q = 1,\ldots,p$$

$$v_{iq} + u_{jq} - y_{ijq} \leq 1; \quad q = 1,\ldots,p$$

$$i, j = 1,\ldots,n$$

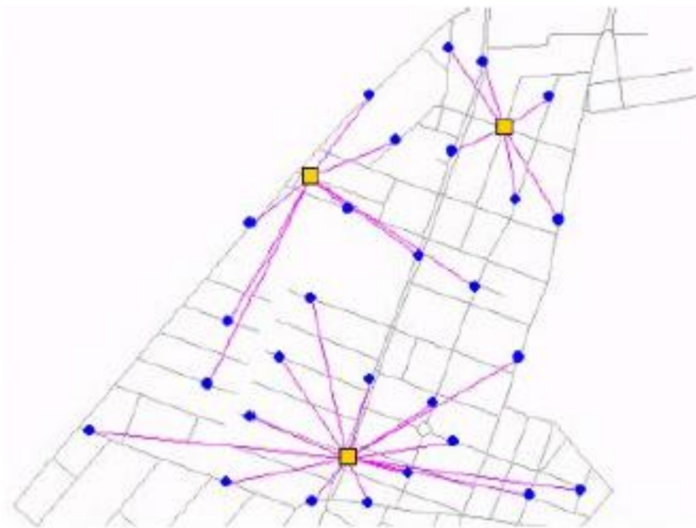
$$v_{iq}, u_{jq}, y_{ijq} \in \{0,1\}$$



p-Medianas
(formulação 3)

Para cada i, (i=1,…,n), construir um vetor $D_i = (D_{i1},\dots,D_{iG_i})$ onde

$$0 = D_{i1} < D_{i2} < \dots < D_{iG_i} = \max\{c_{ij}\}_{j=1}^{n}$$



$$\begin{aligned}
\min \ & \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=2}^{G_i}(D_{ik} - D_{i,k-1})z_{ik} \\
\text{s.t.} \ & \sum_{i=1}^{n} y_i = p, \\
& z_{ik} + \sum_{\{j \ / \ c_{ij} < D_{ik}\}} y_j \geq 1, \quad 1 \leq i \leq n, \ 2 \leq k \leq G_i, \\
& y_i \in \{0,1\}, \quad 1 \leq i \leq n, \\
& z_{ik} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n, \ 2 \leq k \leq G_i.
\end{aligned}$$

p-Medianas
(formulação 4)

$$Min \quad \sum_{j=1}^{m} c_j x_j$$

$$suj.\,a \quad \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = 1; \quad i = 1,\ldots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = p$$

$$x_j \in \{0,1\}$$

$N = \{1,\ldots,n\}$

$S = \{S_1,\ldots,S_n\}$ *// conjunto de subconjuntos de N*

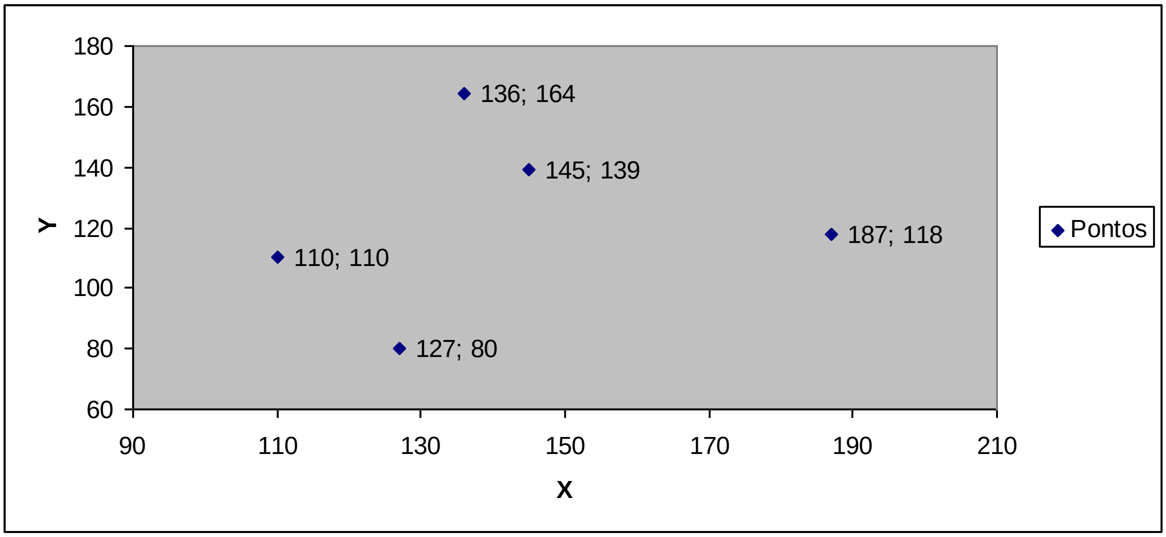
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & se\, i \in S_j \\ 0 & caso\ contrário \end{cases}$$

$$c_j = \underset{i \in S_j}{Min} \left(\sum_{k \in S_j} d_{ik} \right)$$

m = número de colunas ... (grande)

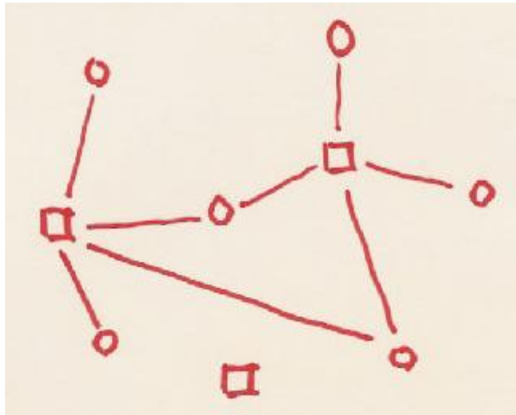
Geração de colunas .....

p-Centros



$$\begin{aligned}
&Min \quad z \\
&suj.a \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1; \qquad && j = 1,\ldots,n \\
&\qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ii} = p \\
&\qquad x_{ij} \le x_{ii}\ ; && i,\ j = 1,\ldots,n \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} \le z\ ; && i = 1,\ldots,n \\
&\qquad z \ge 0,\ \ x_{ij} \in \{0,1\}; \quad && i,\ j = 1,\ldots,n
\end{aligned}$$

Localização capacitado



$$\min \sum_{i\in I} f_i y_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij} x_{ij}$$

suj. a

$$\sum_{j\in J} d_j x_{ij} \le Q_i\, y_i \qquad (\forall i\in I)$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1 \qquad (\forall j\in J)$$

$$y_i = 0 \text{ ou } 1, \quad \forall i\in I$$

$$0 \le x_{ij} \le 1 \qquad (\forall i\in I,\ \forall j\in J)$$

$J = \{1,\dots,n\}$ conjunto de clientes

$I = \{1,\dots,m\}$ conjunto de locais possíveis para instalar um depósito

f_i = custo fixo de instalação do depósito i

Q_i = capacidade do depósito i

Coberturas (1)

Objetivo: Minimizar o número de estações de ambulâncias abertas

Sujeito a: Cobrir em determinado tempo de resposta a todas as partes da cidade.

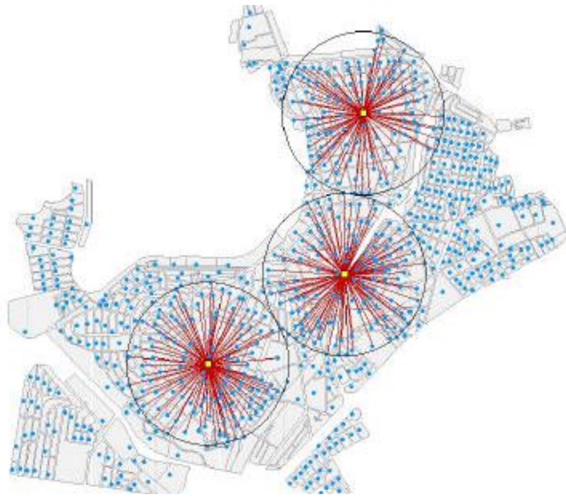
$$Min \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$\text{sujeito a} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1 \,,\; i = 1,\ldots,m$$

$$x_j \in \{0,1\} \,,\; j = 1,\ldots,n$$

$$\text{onde} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, \; se\; d_{ij} \leq d \\ 0, \; caso\; contrário \end{cases}$$

Coberturas (2)



Objetivo: Maximizar a demanda que pode ser coberta em determinado tempo de resposta

Sujeito a: Abrir um número especificado de estações.

$$Max \sum_{i=1}^{m} f_i y_i$$

$$\text{sujeito a} \qquad \sum_{j \in N_i} x_j \geq y_i \ , i = 1,\ldots,m$$

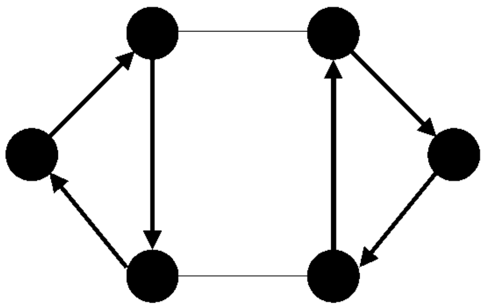
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = p$$

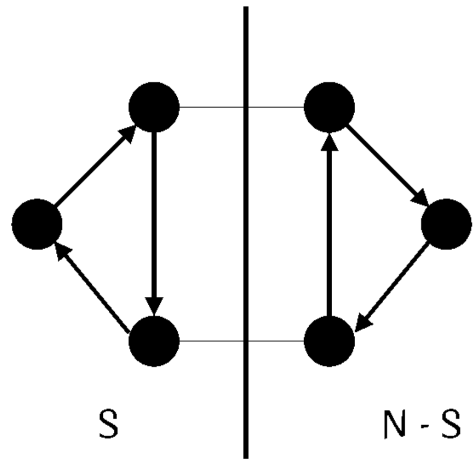
$$x_j \in \{0,1\} \ , \ j = 1,\ldots,n$$

$$y_i \in \{0,1\} \ , i = 1,\ldots,m$$

$N_i = \{ j \mid d_{ij} \leq d \}$ = conjunto de facilidades que estão a menos de uma distância crítica d do ponto de demanda i

Caixeiro Viajante





$$\text{minimizar} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sujeito a :

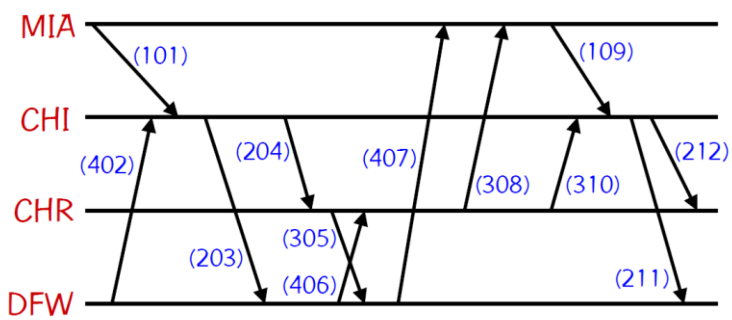
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad \forall j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in N-S} x_{ij} \geq 1, \quad \forall S \subset N, S \neq \{\}, S \neq N$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n$$

Alocação de tripulações



j	vôos	custo	j	vôos	custo
1	101-203-406-308	2900	9	305-407-109-212	2600
2	101-203-407	2700	10	308-109-212	2050
3	101-204-305-407	2600	11	402-204-305	2400
4	101-204-308	3000	12	402-204-310-211	3600
5	203-406-310	2600	13	406-308-109-211	2550
6	203-407-109	3150	14	406-310-211	2650
7	204-305-407-109	2550	15	407-109-211	2350
8	204-308-109	2500	-	-	-

minimizar $2900x_1 + 2700x_2 + 2600x_3 + 3000x_4 + 2600x_5 +$
$+ 3150x_6 + 2550x_7 + 2500x_8 + 2600x_9 + 2050x_{10} + 2400x_{11} +$
$+ 3600x_{12} + 2550x_{13} + 2650x_{14} + 2350x_{15}$

sujeito a :

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

$x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{13} + x_{15} = 1$

$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 = 1$

$x_3 + x_4 + x_7 + x_8 + x_{11} + x_{12} = 1$

$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1$

$x_9 + x_{10} = 1$

$x_3 + x_7 + x_9 + x_{11} = 1$

$x_1 + x_4 + x_8 + x_{10} + x_{13} = 1$

$x_5 + x_{12} + x_{14} = 1$

$x_{11} + x_{12} = 1$

$x_1 + x_5 + x_{13} + x_{14} = 1$

$x_2 + x_3 + x_6 + x_7 + x_9 + x_{15} = 1$

$x_1, \ldots, x_{15} \in \{0,1\}$

Berth / Layout / Class

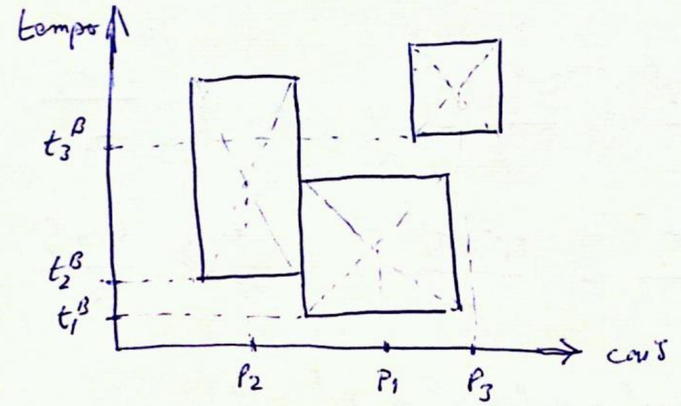
Berth — non overlapping 2D

Layout

Classif.

março 2011

V = conj. de navios



$t_i^F = t_i^B + C_i$

C_i = tempo atendimento navio i

L_i = comprimento navio i

Restrições non-overlapping —

$$\begin{cases} |p_i - p_j|\, x_{ij}^p \geq \dfrac{L_i+L_j}{2}\, x_{ij}^p & ; \forall (i,j) \in V \\ \left| \dfrac{t_i^B+t_i^F}{2} - \dfrac{t_j^B+t_j^F}{2} \right| x_{ij}^t \geq \dfrac{C_i+C_j}{2} \cdot x_{ij}^t & ; \forall (i,j) \in V \\ x_{ij}^p + x_{ij}^t = 1 \;;\; x_{ij}^p, x_{ij}^t \in \{0,1\} & ; \forall (i,j) \in V \end{cases}$$

Obs.: linearizar módulos

U = upper bound em p_i e t_i ...

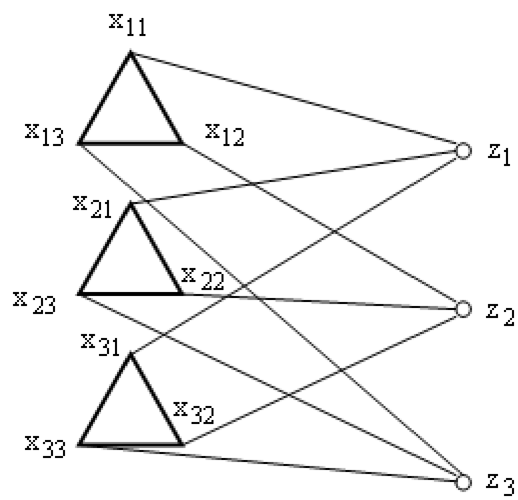
$$\begin{cases} (p_i - p_j) + U \cdot x_{ij}^{p} \geq \dfrac{L_i + L_j}{2} \\ (p_j - p_i) + U \cdot x_{ji}^{p} \geq \dfrac{L_j + L_i}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{t_i^{B} + t_i^{F}}{2} - \dfrac{t_j^{B} + t_j^{F}}{2} + U \cdot x_{ij}^{t} \geq \dfrac{C_i + C_j}{2} \\ \dfrac{t_j^{B} + t_j^{F}}{2} - \dfrac{t_i^{B} + t_i^{F}}{2} + U \cdot x_{ji}^{t} \geq \dfrac{C_i + C_j}{2} \end{cases}$$

$$x_{ij}^{p} + x_{ji}^{p} + x_{ij}^{t} + x_{ji}^{t} \leq 3$$

$$x_{ij}^{p},\ x_{ji}^{p},\ x_{ij}^{t},\ x_{ji}^{t} \in \{0,1\}$$

Localização não capacitado



$$\text{minimizar} \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij}$$

sujeito a :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad \forall i = 1,\ldots,m$$

$$x_{ij} \le y_j, \qquad \forall i = 1,\ldots,m; \forall j = 1,\ldots,n$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0,1\}, \qquad \forall i = 1,\ldots,m; \forall j = 1,\ldots,n$$

$$\text{minimizar} \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij}$$

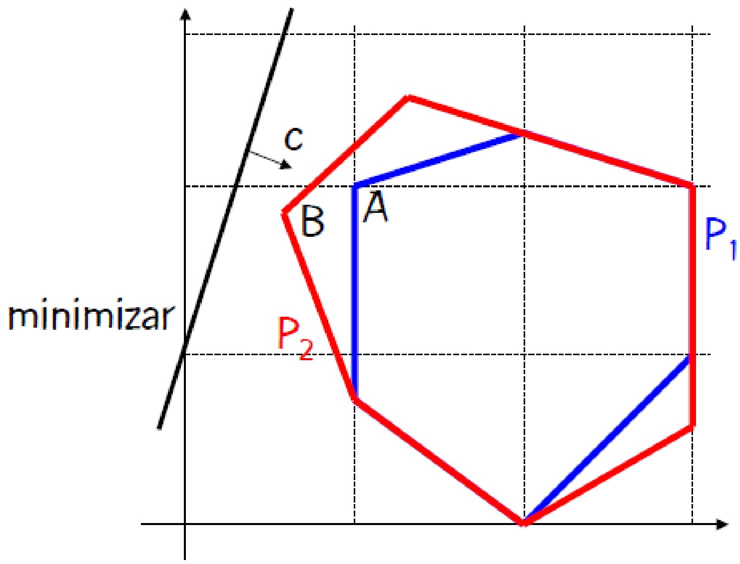
sujeito a :

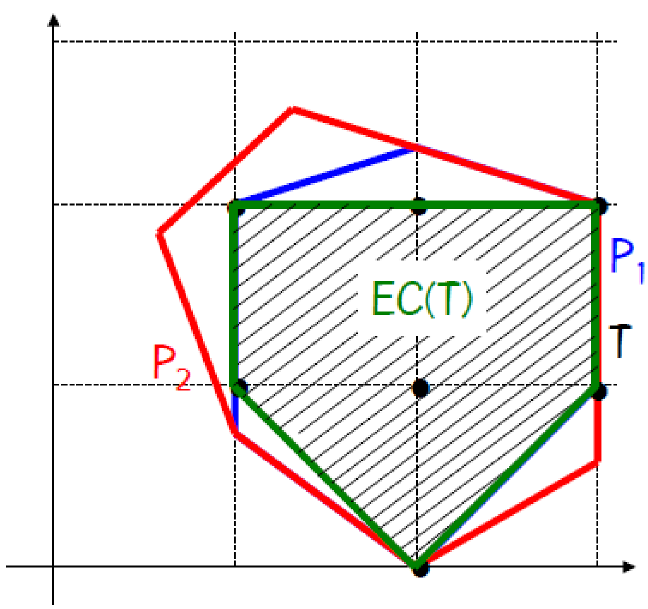
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad \forall i = 1,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le m.y_j, \quad \forall j = 1,\ldots,n$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0,1\}, \qquad \forall i = 1,\ldots,m; \forall j = 1,\ldots,n$$

Localização não capacitado (cont.)





EC(T) = Envoltória Convexa