

## Uma abordagem para o problema de escalonamento de motoristas

Fábio Gavião Avelino de Mélo (FAI) [gaviao\\_tsi@uol.com.br](mailto:gaviao_tsi@uol.com.br)  
Edson Luiz França Senne (UNESP/FEG) [elfsenne@feg.unesp.br](mailto:elfsenne@feg.unesp.br)  
Luiz Antonio Nogueira Lorena (INPE/LAC) [lorena@lac.inpe.br](mailto:lorena@lac.inpe.br)

### Resumo

*O problema de escalonamento de motoristas consiste na criação e atribuição de escalas de serviços a pessoas por um determinado período, respeitando restrições operacionais e trabalhistas, e procurando alcançar certos objetivos. Trata-se de problema que vem sendo estudado há muitos anos, sendo de difícil solução. A solução proposta neste trabalho utiliza modelos de Programação Inteira e algoritmos heurísticos para tratar restrições e objetivos difíceis de serem inseridos nestes modelos. A abordagem proposta divide o problema em quatro etapas, com base na experiência de uma empresa de transporte coletivo interurbano no Brasil. O objetivo final é encontrar escalas bem equilibradas do ponto de vista da carga de trabalho dos motoristas. Neste trabalho são considerados dados de um pequeno problema para ilustrar passo a passo a abordagem proposta.*

**Palavras-chave:** Escalonamento de motoristas, Programação Inteira, Teoria dos Grafos.

### 1. Introdução

O Problema de Escalonamento de Motoristas (PEM) consiste na criação e atribuição de escalas de serviços a pessoas por um determinado período, respeitando restrições operacionais e trabalhistas, e procurando atingir certos objetivos. Trata-se de problema que vem sendo estudado há aproximadamente 50 anos (ERNST *et al.*, 2004b), sendo classificado como NP-difícil (KARP, 1972).

Segundo Ernst *et al.* (2004b), a Programação Inteira (WOLSEY, 1998) tem sido usada preferencialmente como método de solução do PEM. Porém, a complexidade destes problemas normalmente requer o desenvolvimento de técnicas heurísticas (EITZEN *et al.*, 2004; EITZEN, 2002; MATEUS e CASIMIRO, 2002) ou o uso de metaheurísticas, como *Tabu Search* (BURKE *et al.*, 2001), *Simulated Annealing* (OWENS, 2001), Algoritmos Genéticos (AICKELIN e WHITE, 2004) e outras metaheurísticas (FAHLE e BERTELS, 2002).

Devido à importância do problema, diversos estudos já foram realizados, dentre os quais se destacam: Shodi e Norris (2004), sobre o problema de escalonamento para o metrô de Londres; Mason e Nielsen (1999), no desenvolvimento de um novo *framework* denominado Petra, um pacote genérico para solucionar problemas de escalonamento (de tripulações) que vem sendo empregado em diferentes situações na Nova Zelândia; Emden-Weinert *et al.* (2001), sobre o problema de ônibus e bondes elétricos de superfície; Caprara *et al.* (1999), para o problema da companhia ferroviária estatal Italiana; Cappanera e Gallo (2004), sobre o escalonamento de tripulação para empresas aéreas na Europa; Kohl e Karisch (2004), num estudo de caráter teórico sobre o tema.

A tendência para o equacionamento e a solução do PEM tem sido a divisão do problema em etapas (ERNST *et al.*, 2004a). Este trabalho segue também esta tendência, dividindo o problema em quatro etapas, com base na experiência de uma empresa de transporte interurbano no Brasil. A solução proposta neste trabalho emprega modelos de otimização e algoritmos heurísticos. A teoria de grafos foi usada para tratar restrições e objetivos difíceis

de inserir nos modelos de otimização. O objetivo final é encontrar escalas bem equilibradas do ponto de vista da carga de trabalho dos motoristas.

## 2. Termos usados na área de escalonamento de motoristas

Alguns termos importantes para a compreensão do problema são:

- **Viagem:** é a tarefa de conduzir passageiros de um ponto a outro, sendo conhecidos o horário de embarque e desembarque bem como o local de partida e de chegada nestes pontos.
- **Jornada:** é a combinação de várias viagens que serão atribuídas a um motorista para compor o seu dia de trabalho. Também conhecido como turno de trabalho.
- **Jornada de expediente:** refere-se a uma jornada normal de trabalho.
- **Jornada de folga:** refere-se a um dia de descanso remunerado que faz parte da escala de serviço do motorista.
- **Demanda da empresa:** é a quantidade de jornadas que devem ser cumpridas num mesmo dia de modo a atender ao mercado. De acordo com os dias da semana e as estações do ano, a quantidade de jornadas, bem como as viagens previstas em cada uma, podem ser diferentes.
- **Escala de serviço:** é a combinação diária das jornadas de expediente e das jornadas de folga durante um intervalo de tempo. Cada combinação deverá ser atribuída a um único motorista. Uma vez conhecida sua escala, o motorista sabe onde deve se apresentar a cada dia, bem como quais serão os seus dias de folga.
- **Padrões de folga:** são seqüências de expediente e de folga que se repetem ao longo de um período e que podem ser atribuídas a um motorista. Por exemplo, o padrão  $3 \times 1$  indica uma seqüência de três dias de expediente seguidos por um dia de folga, o que se repete durante todo o período de cobertura da escala.
- **Motoristas regulares:** são funcionários contratados e com carteira assinada.
- **Motoristas cobre-turno:** são motoristas sem vínculo empregatício com a empresa mas contratados para prestação de serviços temporários.

## 3. As etapas do problema

Neste trabalho, propõe-se a divisão do problema nas seguintes etapas, que são executadas em seqüência:

- Etapa 1: Determinação das escalas de serviço viáveis.
- Etapa 2: Determinação das escalas de serviço definitivas.
- Etapa 3: Determinação dos melhores pares de expediente e folga.
- Etapa 4: Atribuição dos pares de expediente e folga aos motoristas.

A descrição dos problemas de cada etapa e a solução proposta para cada um deles é apresentada a seguir. A solução final do PEM consiste num conjunto de escalas de serviço, atribuídas, cada uma, a um único motorista.

## 4. Solução das etapas propostas

Para ilustrar o método de solução do PEM proposto neste trabalho, considera-se o seguinte problema: Uma empresa de transporte de passageiros opera em uma grande área e divide o problema de escalonamento de motoristas por sedes. Cada sede compreende várias micro-

regiões, com suas respectivas jornadas. A duração de cada jornada, assim como seus locais de embarque e desembarque são conhecidos. Considere que em uma destas sedes existem duas micro-regiões. Na micro-região 1, existem as jornadas A e B, e na micro-região 2, existem as jornadas C, D e E, como mostra a Figura 1 a seguir.

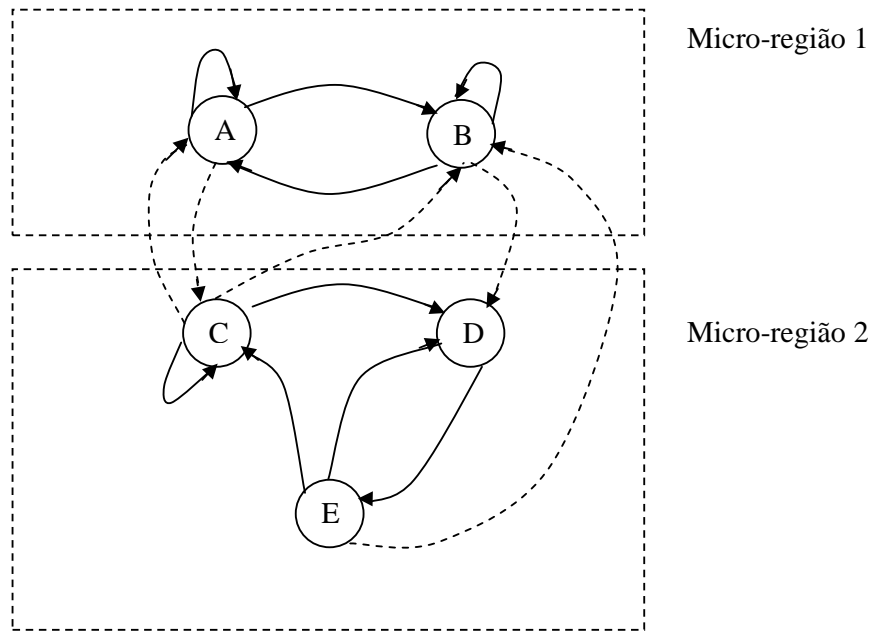


Figura 1: Jornadas das micro-regiões

Na Figura 1, os arcos representam as transições que um motorista pode fazer de uma jornada para a outra. As transições entre microrregiões são mostradas em linhas tracejadas. As transições entre jornadas obedecem as seguintes restrições operacionais e trabalhistas:

- O local de embarque da próxima jornada tem que coincidir com o local de desembarque da jornada anterior. Isto é necessário porque o pernoite dos motoristas tem que ser feito em seu local de domicílio.
- Deve existir um intervalo mínimo de 11 horas entre o desembarque de uma jornada e o embarque da próxima.

A empresa deseja, para esta sede, o escalonamento de seus motoristas para um período de 5 dias, de modo a cobrir as seguintes jornadas diárias:

- dia 1: A, B, C, D, E
- dia 2: A, B, E
- dia 3: B, C, D
- dia 4: A, B, C, D, E
- dia 5: A, B, E

Considere que nesta sede, a empresa adota quatro padrões de folga:

- padrão de folga 1: (1, 1, 1, 0, 1)
- padrão de folga 2: (1, 1, 0, 1, 1)
- padrão de folga 3: (1, 0, 1, 1, 0)

– padrão de folga 4: (0, 1, 1, 1, 1)

Em cada padrão de folga, o valor 1 corresponde a uma jornada de expediente e o valor 0, a uma jornada de folga. Note, portanto, que neste caso a empresa adota os padrões:  $3 \times 1$ ,  $2 \times 1$ ,  $2 \times 1$  e  $4 \times 1$ .

#### 4.1 - Determinação das escalas de serviço viáveis

Alguns autores (CAPRARA *et al.*, 1998; SHODI e NORRIS, 2004; CAPPANERA e GALLO, 2004) têm usado a teoria de grafos como técnica para a inserção de restrições operacionais e trabalhistas do problema no modelo de solução. A abordagem aqui apresentada considera o grafo de jornadas como mostrado na Figura 1 e constrói um outro grafo ( $G_t$ ) para a determinação de escalas de serviço viáveis. A construção do grafo  $G_t$  leva em conta restrições de caráter temporal, tais como: não haver interrupção entre os dias da escala e não alocar a um motorista mais de uma jornada no mesmo dia. A Figura 2 mostra o grafo temporal de transições de jornadas para o grafo da Figura 1.

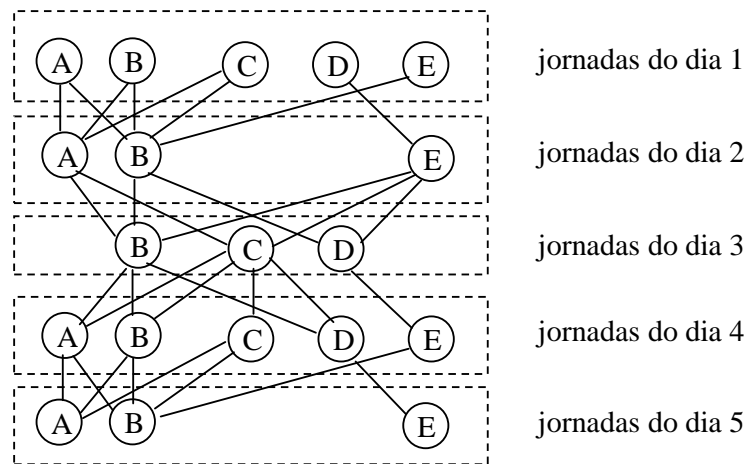


Figura 2: Grafo temporal de transições de jornadas ( $G_t$ )

No grafo da Figura 2, os vértices representam as jornadas de cada dia e os arcos, as transições possíveis entre jornadas consecutivas. Um algoritmo heurístico para travessia deste grafo foi desenvolvido para gerar uma população de escalas viáveis. O algoritmo procura, recursivamente, por todas as transições possíveis em  $G_t$  a partir de um nó  $p$  inicial. Alguns limites são impostos às escalas determinadas por este algoritmo, tais como: o número de jornadas de cada escala deve ser igual ao número de dias do escalonamento, e a duração de uma escala não pode diferir em mais de 30% (para mais ou para menos) da duração ideal. Considera-se como ideal a duração de uma escala em que todas as jornadas são de 8 horas. Assim, para uma escala com 5 jornadas, a duração ideal é de 40 horas. Para o problema acima, este algoritmo determinou 71 escalas de serviço viáveis.

#### 4.2 - Determinação das escalas de serviço definitivas

A duração das escalas determinadas na etapa anterior varia muito entre si. Para melhor distribuir a carga de trabalho entre os motoristas, deseja-se selecionar um conjunto de escalas viáveis com a menor variação de duração possível, que cubra todas as jornadas diárias da empresa ao menos uma vez. Para isso, determina-se a duração média ( $d_{med}$ ), levando-se em conta as durações de todas as escalas determinadas na etapa anterior e formula-se o problema como:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{sujeito a:} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 1 \quad (i = 1, \dots, m \mid i \notin \{p\}) \\ & \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j \geq 1 \quad (i = 1, \dots, m \mid i \in \{p\}) \\ & p = \{i \mid d_i < d_{\max}\} \\ & x_j \in \{1, 0\} \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

onde:  $m$  é o número total de demandas diárias de jornadas;  $n$  é a quantidade de escalas viáveis obtidas na etapa anterior;  $c_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) é a diferença, em valor absoluto, entre ( $d_{\text{med}}$ ) a duração média das escalas e a duração da escala  $j$ ;  $d_i$  é a demanda diária de jornadas do dia  $i$ ;  $d_{\max}$  é a demanda máxima de jornadas do escalonamento;  $p$  é o conjunto de índices das jornadas que pertencem aos dias em que a demanda de jornadas é menor do que a demanda máxima;  $a_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m \mid i \notin \{p\}$ ;  $j = 1, \dots, n$ ) é a matriz de cobertura dos dias cuja demanda de jornadas iguala a demanda máxima, tal que  $a_{ij} = 1$  se a jornada  $i$  for coberta pela escala  $j$ , e  $a_{ij} = 0$ , caso contrário;  $b_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m \mid i \in \{p\}$ ;  $j = 1, \dots, n$ ) é a matriz de cobertura das jornadas dos dias cuja demanda é menor do que a demanda máxima, tal que  $b_{ij} = 1$  se a jornada  $i$  for coberta pela escala  $j$ , e  $b_{ij} = 0$ , caso contrário;  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) é a variável de decisão tal que  $x_j = 1$ , se a escala  $j$  foi escolhida como definitiva, e  $x_j = 0$ , caso contrário.

Considerando o problema-exemplo, este modelo seleciona as escalas: 18 (A-B-D-E-B), 29 (B-A-C-C-B), 36 (C-A-B-A-A), 56 (D-E-B-B-A) e 70 (E-B-B-D-E). A Tabela 1 mostra o atendimento das jornadas diárias para esta solução encontrada.

Dia	Escalas definitivas					Jornadas do dia
	18	29	36	56	70	
1º dia	A	B	C	D	E	A, B, C, D, E
2º dia	B	A	A	E	B	A, B, E
3º dia	D	C	B	B	B	B, C, D
4º dia	E	C	A	B	D	A, B, C, D, E
5º dia	B	B	A	A	E	A, B, E

Tabela 1: Cobertura das jornadas diárias

### 4.3 - Determinação dos melhores pares de expediente e folga

Nesta etapa, deseja-se atribuir padrões de folga às escalas definitivas determinadas na etapa anterior procurando minimizar a variação dos padrões de folga ao longo das escalas e o número de motoristas cobre-turnos.

Para reduzir a variação dos padrões de folga procura-se determinar o maior subconjunto de escalas sem sobreposição dentro do conjunto de escalas definitivas encontrados na etapa anterior. Para isto, define-se uma matriz de folgas  $f_{ij}$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$ ), cujas linhas representam as escalas definitivas e as colunas, os dias do escalonamento, tal que:  $f_{ij} = 1$  se a jornada do dia  $j$  da escala  $i$  é coberta por alguma outra escala, e  $f_{ij} = 0$ , caso contrário.

Para determinar a matriz de folgas, escolhe-se aleatoriamente uma escala  $i$  como escala inicial e faz-se  $f_{ij} = 0$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Em seguida, escolhe-se outra escala  $i'$  e determinam-se os valores de  $f_{ij}$  ( $j = 1, \dots, m$ ) correspondentes, repetindo-se este processo até que todas as escalas

definitivas tenham sido consideradas. Ao final deste processo, armazena-se a matriz de folgas obtida. Todo o procedimento é repetido considerando-se uma outra escala definitiva como escala inicial. Ao final do procedimento escolhe-se a matriz de folga que contém o maior número de linhas formadas apenas por elementos iguais a zero.

Para o problema exemplo considerado acima, este procedimento resulta na matriz de folgas mostrado na Tabela 2.

Escalas	Dias do escalonamento				
	1	2	3	4	5
18	0	0	0	0	0
29	0	1	0	0	1
36	0	0	1	0	1
56	0	0	0	0	0
70	0	1	1	0	0

Tabela 2: Matriz de folgas para as escalas definitivas

Para determinar o número de motoristas cobre-turnos necessários comparam-se os elementos das linhas da matriz de folgas com os elementos das linhas da matriz de cobertura  $a_{ij}$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$ ), onde que  $a_{ij} = 1$  se o dia  $j$  for coberto pelo padrão de folga  $i$ , ou seja, se o dia  $j$  for dia de expediente no padrão de folga  $i$ , e  $a_{ij} = 0$ , caso contrário. Os possíveis resultados destas comparações são mostrados na Tabela 3.

$f_{ij}$	$a_{ij}$	Resultado
0	0	Necessário um motorista cobre-turno
1	0	Folga coincidente
0	1	Expediente normal
1	1	Folga forçada

Tabela 3: Determinação da necessidade de motoristas cobre-turnos

Para cada uma das escalas definitivas, todos os padrões de folga estabelecidos na matriz de cobertura  $a_{ij}$  são considerados. O padrão de folga que corresponde à menor necessidade de motoristas cobre-turno é atribuído a esta escala. Em caso de empate, procura-se minimizar a quantidade de folgas forçadas. Este procedimento aplicado ao problema-exemplo resulta nas seguintes atribuições mostradas na Tabela 4:

Escalas	Dias do escalonamento					Padrão de folga
	1	2	3	4	5	
18	1	1	0 <sup>-</sup>	1	1	$2 \times 1$
29	1	0	1	1	0	$2 \times 1$
36	0	1	1	1	1 <sup>+</sup>	$4 \times 1$
56	1	1	1	0	1 <sup>-</sup>	$3 \times 1$
70	1 <sup>+</sup>	0	1	1	0	$2 \times 1$

Tabela 4: Atribuição de padrões de folga às escalas definitivas

Cada par (escala, padrão de folga) da Tabela 5 pode ser atribuído a um motorista. Nesta figura, símbolo ‘-’ indica a ocorrência de um motorista cobre-turno. Observe que será necessário um motorista cobre-turno no terceiro dia da escala 18 e no quinto dia da escala 56. No entanto, como esta necessidade ocorre em dias diferentes, há a necessidade de contratação de apenas um motorista cobre-turno. O símbolo ‘+’ indica uma folga forçada de um motorista, ou seja, este motorista não precisa trabalhar porque sua jornada já foi coberta pelo motorista

de uma outra escala. Neste caso, serão necessários 5 motoristas regulares e 1 motorista coberturno.

#### 4.4 - Atribuição dos pares de escalas aos motoristas

Deseja-se atribuir as escalas com os respectivos padrões de folga determinados na etapa anterior aos motoristas regulares da empresa. Este problema pode ser modelado como um problema de atribuição da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{sujeito a: } \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1 \quad (i = 1, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1 \quad (j = 1, \dots, n) \\ c_{ij} &\in Z^+, \quad x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

onde:  $n$  é o número de escalas, que corresponde também ao número de motoristas;  $c_{ij}$  ( $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$ ) é o grau de incompatibilidade entre o motorista  $i$  e a escala  $j$ ;  $x_{ij}$  ( $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$ ) é a variável de decisão tal que:  $x_{ij} = 1$ , se o motorista  $i$  está atribuído à escala  $j$  na solução final,  $x_{ij} = 0$ , caso contrário. Observe, neste modelo, que qualquer motorista pode, em princípio, ser atribuído a qualquer escala. Deseja-se, no entanto, uma atribuição de escalas com a menor incompatibilidade total.

Para o problema exemplo, a matriz de incompatibilidade foi estabelecida como:  $c = \{\{7, 7, 7, 1, 1\}, \{1, 1, 2, 2, 2\}, \{1, 7, 1, 5, 5\}, \{1, 7, 7, 4, 5\}, \{7, 6, 1, 1, 1\}\}$ . Neste caso, a solução do problema corresponde à atribuição apresentada na Tabela 5.

Motorista	Escala atribuída
1	70: E-B-B-D-E
2	29: B-A-C-C-B
3	36: C-A-B-A-A
4	18: A-B-D-E-B
5	56: D-E-B-B-A

Tabela 5: Solução final do PEM

## 5. Conclusão

Neste trabalho procurou-se apresentar uma nova proposta de solução para o problema de escalonamento de motoristas para empresas de transporte coletivo interurbano. Trata-se de um problema complexo e de difícil solução devido à quantidade de variáveis e de restrições envolvidas e também devido à dificuldade de levar em conta todas as restrições operacionais e trabalhistas necessárias. Neste trabalho foram considerados dados de um pequeno problema apenas para ilustrar passo a passo a abordagem proposta. Uma instância real deste problema para uma empresa de médio porte compreende cerca de 25 padrões de folga, uma demanda em torno de 80 a 200 jornadas diárias e um período de escalonamento que varia de 40 dias até 1 ano.

Espera-se com a abordagem proposta não só ajudar na solução de problemas de escalonamento em empresas de pequeno e médio portes, mas também contribuir para a disseminação de técnicas de Otimização Combinatória entre tais empresas.

## Referências

- AICKELIN, U.; WHITE, P.** Building Better Nurse Scheduling Algorithms. *Annals of Operations Research*, 128, Special Issue on Staff Scheduling and Rostering, p. 159-177, 2004.
- BURKE, E.; COWLING, P.; DE CAUSMAECKER, P.; VENDEN BERGHE, G.** A Memetic Approach to the Nurse Rostering Problem. *Applied Intelligence*, v. 15, n. 3, p. 199-214, 2001.
- CAPRARA, A.; FISCHETTI, M.; GUIDA, P.; TOTH, P.; VIGO, D.** Solution of Large Scale Railway Crew Planning Problems: The Italian Experience. N. Wilson (ed), Computer Aided Transit Scheduling, *Lecture Notes in Economical and Mathematical Systems*, v. 430, p. 1-18, Berlin:Springer, 1999.
- CAPRARA, A.; TOTH, P.; VIGO, D ; FISCHETTI, M.** Modeling and Solving the Crew Rostering Problem. *Operations Research*, v. 46, n. 6, p. 820-830, 1998.
- CAPPANERA, P.; GALLO, G.** A multicommodity flow approach to the crew rostering problem. *Operations Research*, v. 52, n. 4, p. 583-596, July-August, 2004.
- EITZEN, G.; MILLS, G.; PANTON, D.** Multi-Skilled Workforce Optimisation. *Annals of Operations Research*, 127, Special Issue on Staff Scheduling and Rostering, p. 359-372, 2004.
- EITZEN, G.** *Integer Programming Methods for Solving Multi-Skilled Workforce Optimisation Problems*. Ph.D. Thesis, School of Mathematics, University of South Australia, 2002.
- EMDEN-WEINERT, T.; KOTAS, H.; SPEER, U.** DISSY – A Driver Scheduling System for Public Transport - Version 1.11. Em: <http://people.freenet.de/Emden-Weinert/DISSY-Whitepaper.html>, 2001. Acessado em Agosto de 2002.
- ERNST, A.T.; JIANG, H.; KRISHNAMOORTHY, M.; SIER, D.** Staff scheduling and rostering: A review of applications, methods and models. *European Journal of Operational Research*, v. 153, p. 3-27, 2004a.
- ERNST, A.T.; JIANG, H.; KRISHNAMOORTHY, M.; OWENS, B.; SIER, D.** An Annotated Bibliography of Personnel Scheduling and Rostering. *Annals of Operations Research*, v. 127, p. 21-144, 2004b.
- FAHLE, T.; BERTELS, S.** *A hybrid Setup for a Hybrid Scenario: Combining Heuristics for the Home health Care Problem*. Working Paper, 2002.
- KARP, R.** *Reducibility among combinatorial problems*. Symposium on Mathematical Programming at the University of Wisconsin at Madison, Sep. 1972.
- KOHL, N.; KARISCH, S.E.** Airline Crew Rostering: Problem Types, Modeling, and Optimization. Kluwer Academic Publishers. *Annals of Operations Research*, 127, p. 223-257, 2004.
- MASON, A.; NIELSEN, D.** *PETRA: A Programmable Optimisation Engine and Toolbox for Personnel Rostering Applications*, 1999. Em: <http://www.esc.auckland.ac.nz/Mason>. Acessado em Abril de 2004.
- MATEUS, G.; CASIMIRO, J.** *Models and Algorithms for The Crew Scheduling Problem*. Working Paper, 2002.
- OWENS, B.** *Personnel scheduling using constraint logic programming*. Master's Thesis, Computer Science and Software Engineering, Monash University, Australia, 2001.
- SHODI, M.S.; NORRIS, S.A.** A flexible, fast and optimal modeling approach applied to crew rostering at London Underground. *Annals of Operations Research*, 127, p.259-281, 2004.
- WOLSEY, L.A.** *Integer Programming*. John Wiley and Sons, 1998.