

# ANÁLISE DA ESTIVAGEM DE UNIDADES DE CELULOSE USANDO RELAXAÇÃO LAGRANGEANA

**Glaydston Mattos Ribeiro<sup>1</sup>**

Departamento de Ciência da Computação e Informática  
UniAracruz – Faculdade de Aracruz

**Luiz Antonio Nogueira Lorena<sup>2</sup>**

Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada  
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

## RESUMO

O processo de estivagem de cargas consiste em arranjar itens no porão de um navio. Este trabalho aborda a estivagem de unidades de celulose em porões de navios dedicados a este tipo de transporte, procurando maximizar o número de unidades estivadas. Esse problema, essencialmente tridimensional, pode ser reduzido ao caso bidimensional devido às restrições impostas no transporte, tornando-se semelhante ao problema do carregamento de paletes. Neste trabalho é apresentada uma formulação para o problema da estivagem de unidades de celulose, e uma relaxação lagrangeana que explora o grafo de conflitos obtido para o problema. São realizados experimentos computacionais e os resultados são comparados com resultados práticos obtidos junto a portos Brasileiros. Os resultados obtidos com a relaxação foram melhores que os realizados na prática, podendo representar economias em termos de custo.

## ABSTRACT

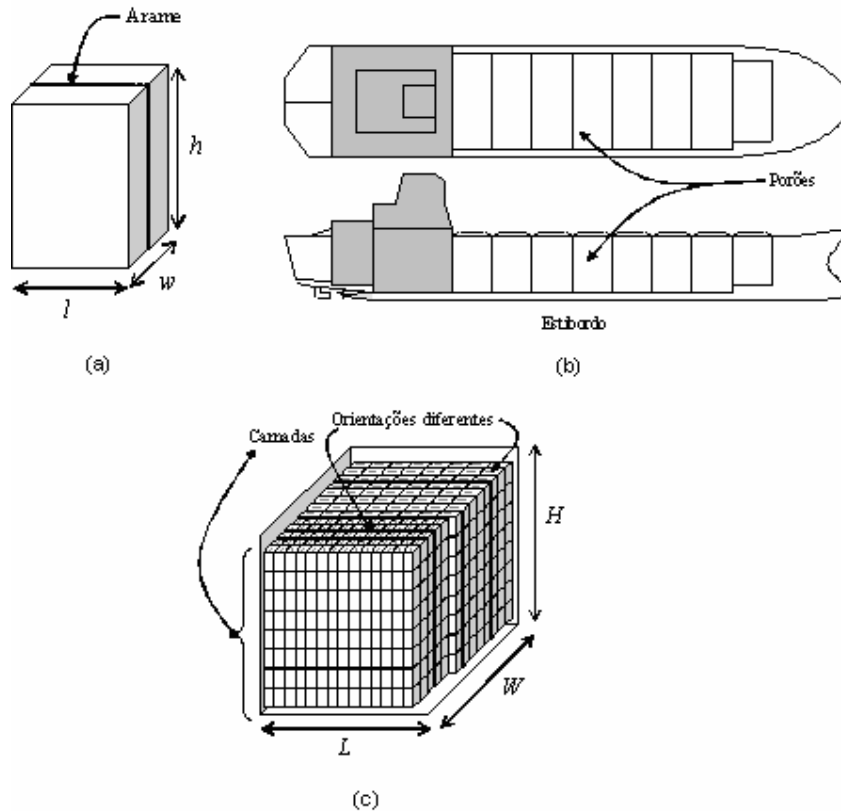
The cargo stowage process in ships consists in arranging items into holds. This paper approaches the problem of maximum number of stowed units of woodpulp into holds of dedicated maritime international ships. This problem, essentially three-dimensional can be reduced for the two-dimensional case due to constraints provided by transport, and becomes similar to the manufacturer's pallet loading problem. We present in this paper a formulation to the woodpulp stowage solved by a lagrangean relaxation with clusters (LagClus) that considers the conflict graph generated by overlaps of woodpulp units. Computational tests are performed and compared with the results found in practice at Brazilian ports. The results obtained by LagClus improve these practice results, and consequently, it can represent savings if we consider the shipment costs.

## 1. INTRODUÇÃO

A estivagem de cargas consiste em arranjar itens menores (unidades de carga) em uma unidade de transporte da melhor maneira possível procurando reduzir os custos envolvidos (Branch, 1996). O planejamento da estivagem deve considerar o tipo de carga a ser estivada, o tipo de unidade de transporte, a natureza da carga, dentre outros fatores (Handabaka, 1994). Entretanto, neste trabalho aborda-se o problema da estivagem de unidades de celulose em porões de navios dedicados para o transporte marítimo internacional. A Figura 1 (a) apresenta de forma esquemática uma unidade de celulose, em (b) é apresentada a disposição dos porões do navio e em (c) é apresentada uma possível estivagem de um porão.

O problema da estivagem de unidades de celulose (PEUC), essencialmente, pode ser definido como sendo o problema de empacotar tridimensionalmente itens (unidades) em um caixa (porão). Uma unidade de celulose é composta por um conjunto de fardos menores, que por sua vez são constituídos de placas de celulose amarradas por um arame. Na literatura o PEUC pode ser visto como um caso particular de um outro problema mais geral conhecido como *Three-Dimensional Bin Packing Problem (3D-BPP)*. No 3D-BPP são dados um conjunto de  $n$  itens, cada um caracterizado pela sua largura  $w_i$ , altura  $h_i$  e comprimento  $l_i$  para todo  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , e um número limitado de  $bins$  (caixas), no qual inicialmente considera-se uma disponibilidade de pelo menos  $n$  bins idênticos e tridimensionais tendo como dimensões comuns a largura  $W$ , altura  $H$  e comprimento  $L$ . O 3D-BPP consiste em se empacotar ortogonalmente todos os  $n$  itens no menor número possível de  $bins$  (Silva *et al.*, 2001).

O PEUC é um caso particular do 3D-BPP pois apresenta restrições operacionais que permitem transformá-lo em um problema bidimensional. Todas as unidades de celulose a serem estivadas são iguais, ou seja, apresentam as mesmas dimensões e devem ser posicionadas em único porão de cada vez. Assim, esse problema pode ser reduzido ao caso do empacotamento de unidades em um porão dado que as unidades possuem dimensões iguais inferiores às dimensões do porão. Com isso, a estivagem é feita por camadas através dos guindastes, até atingir uma altura satisfatória que permita fechar a escotilha, e com isso, aproveitar ao máximo o espaço útil do porão.



**Figura 1:** Unidade de celulose (a), disposição dos porões e (c) exemplo de uma estivagem.

Cada unidade de celulose também é amarrada por um arame (Ver Figura 1 (a)) para permitir um carregamento mais eficiente no berço de atracação através dos guindastes. Porém, durante o transporte, as unidades tendem a se movimentar devido ao balanço proporcionado pelo navio e, como além das unidades os fardos também são amarrados por arames, se entre uma camada e outra a ordem de colocação das unidades for alterada gerando o cruzamento dos arames, estes podem se partir avariando a carga e podendo gerar até mesmo incêndios generalizados. Assim, para evitar isso, definido a primeira camada do porão, as demais são repetições desta primeira. Com isso o PEUC pode ser reduzido para o caso de empacotamento bidimensional de itens iguais e uma única área maior.

Usando a tipologia proposta por Dyckhoff (1990), o PEUC pode ser classificado como sendo 2/B/O/C (bidimensional, seleção de itens, objeto único, itens iguais) e com isso, pode ser visto com o problema de carregamento de paletes do produtor (PCPP) (Hodgson, 1982) muito

citado na literatura, que consiste em arranjar o máximo possível de caixas iguais sobre um palete. Considerando as diversas aplicações práticas do PCPP, muitos métodos de solução têm sido estudados. Os algoritmos exatos existentes utilizam basicamente uma estrutura em árvore (Dowsland, 1987; Bhattacharya *et al*, 1998; Alvarez-Valdes *et al*, 2005). Devido às dificuldades existentes, vários outros métodos foram criados ou utilizados, entre eles estão os métodos construtivos que dividem o palete em blocos (Young-Gun e Maing-Kyu, 2001) e métodos recursivos (Morabito e Morales, 1998). Existem outros trabalhos que aplicam as metaheurísticas conhecidas como Busca Tabu (Pureza e Morabito, 2005) e Algoritmo Genético (Herbert and Dowsland, 1996).

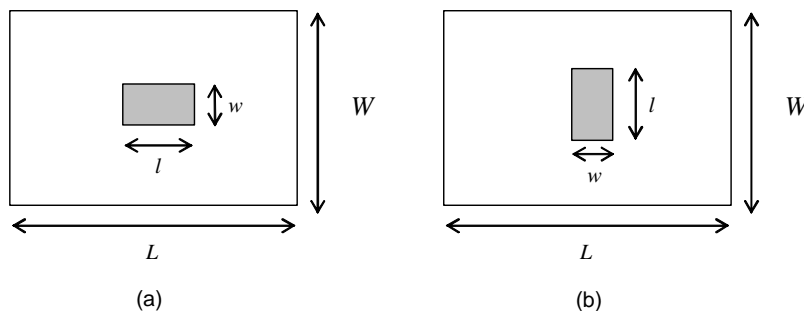
O PEUC analisado de uma outra forma, é o clássico problema do máximo conjunto independente de vértices (PMCIIV) (Dowsland, 1987). Assim, o PEUC pode ser representado através de um grafo de conflitos em que cada vértice, indica a localização do canto inferior esquerdo de uma unidade de celulose dentro do porão, e as arestas do grafo, as possíveis sobreposições das unidades.

Considerando que o PEUC pode ser analisado como um PCPP e que o grafo de conflitos pode ser particionado, este trabalho vem apresentar uma formulação para o PEUC e propor uma relaxação lagrangeana com divisão em *clusters* para o mesmo. Essa técnica foi aplicada em algumas instâncias testes propostas na literatura para o PCPP e em algumas instâncias reais do PEUC obtidos juntos a alguns portos brasileiros. Os resultados obtidos para o PEUC foram superiores aos obtidos na prática, permitindo transportar mais unidades por porão.

Em seguida, na Seção 2 é apresentada a formulação matemática de Beasley (1985) adaptada para o PEUC. Na Seção 3 é apresentada a relaxação lagrangeana com *clusters* proposta. Na Seção 4 são apresentados os resultados computacionais para todas as instâncias utilizadas, inclusive as reais. Por último, na Seção 5 são apresentadas as principais conclusões e perspectivas futuras de trabalho.

## 2. FORMULAÇÃO DO PEUC

O PEUC pode ser formulado usando o caso particular da formulação de Beasley (1985) para o problema de corte não-guilhotinado bidimensional. Seja  $L$  e  $W$  o comprimento e a largura do porão, respectivamente, tal que  $L \geq W$ , e,  $l$  e  $w$  o comprimento e a largura das unidades de celulose, respectivamente, tal que  $l \geq w$  e  $l \leq W$ . Para representar os possíveis modos de posicionar uma unidade, seja  $(l_1, w_1) = (l, w)$  e  $(l_2, w_2) = (w, l)$ . Com isso, essas posições podem ser representadas por  $(l_i, w_i)_{i=1,2}$ , que indicam o comprimento e a largura de uma face na orientação  $i$ . A Figura 2 apresenta essas possíveis orientações sobre o piso do porão.



**Figura 2:** Possíveis orientações de uma unidade de celulose.

Para representar as posições das unidades no porão, seja  $X$  e  $Y$  dois conjuntos que juntos são utilizados para definir as coordenadas  $(p,q)$  do canto inferior esquerdo das unidades. Esses conjuntos podem ser descritos como:

$$X = \left\{ p \in Z^+ \mid p = \sum_{i=1}^2 l_i b_i, 0 \leq p \leq L - w, b_i \geq 0 \text{ e inteiro}, i = 1,2 \right\} \quad (1)$$

$$Y = \left\{ q \in Z^+ \mid q = \sum_{i=1}^2 w_i b_i, 0 \leq q \leq W - w, b_i \geq 0 \text{ e inteiro}, i = 1,2 \right\} \quad (2)$$

Seja  $a$  uma função que descreve as restrições de sobreposições no porão. Esta função pode ser obtida com antecedência para cada vértice  $(p,q)$  em relação a qualquer outro vértice  $(r,s)$ , para cada orientação  $i$ , sendo  $p \in X \mid p \leq L - l_i$ ,  $q \in Y \mid q \leq W - w_i$ ,  $r \in X$ ,  $s \in Y$ , e  $i = 1,2$ .

Assim, essa função pode ser expressa como:

$$a_{ipqrs} = \begin{cases} 1, & \text{Se } 0 \leq p \leq r \leq p + l_i - 1 \leq L - 1 \text{ e } 0 \leq q \leq s \leq q + w_i - 1 \leq W - 1 \\ 0, & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad (3)$$

Agora, seja  $x_{ipq} \in \{0,1\}$  uma variável binária de decisão para todo  $p \in X \mid p \leq L - l_i$ ,  $q \in Y \mid q \leq W - w_i$ , e  $i = 1,2$ . Se  $x_{ipq} = 1$ , uma unidade de celulose é colocada nas coordenadas  $(p,q)$  do porão com a orientação  $i$ , caso contrário  $x_{ipq} = 0$ .

Com isso, o PEUC pode ser formulado como (Beasley, 1985):

$$v(PEUC) = \text{Max} \left( \sum_{i=1}^2 \sum_{\{p \in X \mid p \leq L - l_i\}} \sum_{\{q \in Y \mid q \leq W - w_i\}} x_{ipq} \right) \quad (4)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{\{p \in X \mid p \leq L - l_i\}} \sum_{\{q \in Y \mid q \leq W - w_i\}} a_{ipqrs} x_{ipq} \leq 1, \quad \forall r \in X \text{ e } s \in Y \quad (6)$$

$$x_{ipq} \in \{0,1\} \quad \forall i = 1 \dots 2, p \in X \text{ tal que } p \leq L - l_i, \text{ e } q \in Y \text{ tal que } q \leq W - w_i \quad (7)$$

A restrição definida pela Equação (6) garante a não existência de sobreposição de unidades e a Equação (7) que as variáveis de decisão são binárias.

Conforme citado anteriormente, este problema pode ser formulado como um Problema de Máximo Conjunto Independente de Vértices (PMCIIV). Esse problema é clássico, bastante estudado na literatura. O PMCIIV normalmente está embutido na aplicação e com isso, surge em vários campos como em teoria da codificação, visão computacional e estudos químicos (ver Bomze *et al.*, 1999).

Sendo assim, o PMCIIV pode ser modelado como segue. Considere  $G=(V,E)$  um grafo tal que  $V$  representa um conjunto de vértices  $x_v$  e  $E$  um conjunto de arestas  $(u,v)$  sendo  $u,v \in V$  e  $u \neq v$ . O conjunto  $V$  é constituído de todas os possíveis pontos em que uma unidade pode ser colocada no porão, e o conjunto  $E$  é constituído de arestas que indicam possíveis conflitos entre as unidades. Considere ainda que não existem pesos relacionados aos vértices ou arestas. Assim, o problema de máximo conjunto independente de vértices consiste em obter um

subconjunto  $V' \subseteq V$  tal que todo par de vértices de  $V'$  não é adjacente, isto é, se  $r, w \in V'$ , então  $(r, w) \notin E$ . Com isso, o PMCIV pode ser modelado da seguinte maneira:

$$v(\text{PMCIV}) = \text{Max} \left( \sum_{v \in V} x_v \right) \quad (8)$$

Sujeito a:

$$x_u + x_v \leq 1 \quad \forall (u, v) \in E \quad (9)$$

$$x_u \in \{0, 1\} \quad \forall u \in V \quad (10)$$

Se  $x_v = 1$  o vértice  $v$  está incluído no conjunto independente, caso contrário  $x_v = 0$ . As restrições definidas pela Equação (9) garantem que dois vértices adjacentes não podem estar presentes simultaneamente na solução do problema. Já a Equação (10) indica que todas as variáveis  $x_v$  são binárias.

Devido a sua grande área de aplicação, existem várias técnicas de solução propostas na literatura para a solução do PMCIV. Técnicas exatas incluem enumeração explícita de conjuntos independentes de vértices (Bron e Kerbosch, 1973), *Branch-and-Bound* (Balas e Xue, 1996; Östergard, 2002), e formulações contínuas com *Branch-and-Bound* (Barnes, 2000). Além disso, várias heurísticas foram propostas como os algoritmos de contração de vértices (Hertz, 1990), e a heurística gulosa de Kopf e Ruhe (1987). Existem ainda heurísticas de busca local que procuram melhorar uma determinada solução dada, por exemplo, por uma heurística gulosa (ver Feo *et al* (1994)).

Por outro lado, várias metaheurísticas também já foram utilizadas para resolver o PMCIV. Aarts e Korst (1989) propuseram o uso da metaheurística *Simulated Annealing*, Bui e Eppley (1995) utilizaram Algoritmos Genéticos, e Gendreau *et al* (1999) trabalharam com Busca Tabu.

O grafo do PMCIV, conseqüentemente do PEUC, possui a característica de apresentar áreas agrupadas formando agrupamentos de vértices (*clusters*) que pouco influenciam em outras áreas, como por exemplo, o canto superior esquerdo do porão apresenta uma disposição das unidades de pouca influência no canto inferior direito. Assim, explorando essa característica, este trabalho vem propor uma relaxação lagrangeana com *clusters* para o PEUC, permitindo obter bons limitantes.

### 3. RELAXAÇÃO LAGRANGEANA COM CLUSTERS

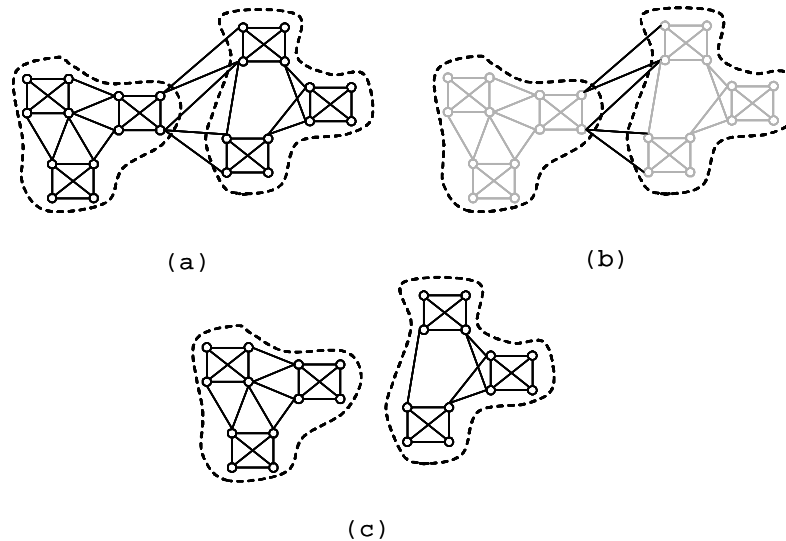
Conforme citado anteriormente, o PEUC pode ser visto como um PMCIV. Com isso, a partir da formulação de Beasley (1985), um grafo de conflitos pode ser obtido. A relaxação Lagrangeana com *clusters* (LagClus) explora o fato de que muitos problemas podem ser modelados em grafos de conflitos, e em alguns casos, esses são bem adaptados para uma fase de particionamento (Ribeiro e Lorena, 2004ab). Sendo assim, a LagClus pode ser aplicada da seguinte maneira:

- a) Montar o grafo de conflitos a partir da modelagem do PEUC e aplicar uma heurística de particionamento do grafo, dividindo-o em  $\bar{P}$  *clusters*;
- b) Relaxar as restrições presentes no PEUC que apresentam vértices em mais de um *cluster*. Em cada uma delas, analisar se existem pares de vértices que pertencem a um

mesmo *cluster*, se existir, adicionar ao respectivo *cluster* uma restrição de adjacência entre cada par encontrado;

- c) A relaxação lagrangeana obtida é dividida em  $\bar{P}$  subproblemas e resolvida.

O algoritmo de subgradientes implementado foi o mesmo apresentado por Narciso e Lorena (1999), com os critérios de parada idênticos aos utilizados por Held e Karp (1971). Maiores detalhes sobre a LagClus podem ser obtidos em Ribeiro (2005).



**Figura 3:** Esquema de particionamento. (a) Grafo de conflitos, (b) arestas de conexão ou arestas entre *clusters* e (c) *clusters* obtidos.

A Figura 3 exemplifica a questão do particionamento. Na Figura 3(a) têm-se dois *clusters* bem definidos, em (b) pode-se observar separadamente as arestas que conectam estes *clusters* que, se removidas, formam dois subgrafos (ou dois subproblemas) com as mesmas características do problema original (ver Figura 3(c)). Com isso, relaxando no sentido lagrangeana as arestas mostradas em (b), cada *cluster*  $p$  pode ser resolvido independentemente e em seguida, todos os subproblemas podem ser reagrupados para atualização dos multiplicadores lagrangeanos, e o ciclo continua até que o algoritmo de subgradientes encontre uma das seguintes condições de parada: diferença entre o limitante superior e inferior menor que um, passo menor que 0,005 e módulo do gradiente igual a 0.

Antes da primeira iteração do algoritmo de subgradientes, foi implementada a heurística de blocos proposta por Smith e De Cani (1980) para o PCPP, gerando uma solução inicial para o PEUC. Essa solução é utilizada na definição do tamanho do passo e pode ser substituída por uma solução relaxada transformada em uma solução factível por meio de uma heurística lagrangeana. Essa heurística, denominada de heurística de verificação e melhoria (HVM), é constituída de duas fases: a que gera uma solução factível para o PEUC a partir da solução relaxada, e a que procura melhorá-la inserindo mais vértices (unidades de celulose) na solução factível obtida.

Primeiro, a heurística identifica todos os vértices que estão em conflitos na solução relaxada, removendo dessa solução o vértice com o maior número de conflitos. Em seguida, esse processo é repetido sobre a solução restante até que se produza uma solução factível para o PEUC. Encerrada esta fase, começa a segunda que tenta introduzir novos vértices nessa solução procurando maximizar o número de vértices. Os novos vértices são obtidos a partir do conjunto dos vértices restantes não incluídos os vértices removidos na primeira fase da heurística. A Figura 4 mostra os principais passos da HVM. O tamanho do passo no algoritmo de subgradientes é atualizado considerando os limitantes superiores da LagClus e as soluções factíveis (limitantes inferiores) obtidas com a HVM.

**Heurística de Verificação e Melhoria - HVM**

1. Fazer vetor de solução factível ( $v_f$ ) igual ao vetor de solução relaxada dado pela LagClus;
2. Enquanto não obter uma solução factível
  3. Para cada vértice  $i$  de  $v_f$ , definir o número de vértices  $j$  conflitantes com  $i$ ;
  4. Ordenar, decrescentemente,  $v_f$  conforme o número de vértices conflitantes;
  5. Eliminar o primeiro vértice presente em  $v_f$ ;
6. Fim do enquanto;
7. Testar dentre os demais vértices não presentes em  $v_f$ , se é possível inserir mais algum em  $v_f$ .

**Figura 4:** Heurística lagrangeana usada durante o algoritmo de subgradientes para o PEUC.

#### 4. EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Como mostrado, dado a semelhança do PEUC com o PCPP, inicialmente foram feitos testes sobre instâncias propostas na literatura para o PCPP e consideradas difíceis para uma relaxação. As instâncias são as propostas por Letchford e Amaral (2001) e estão mostradas na Tabela 1, os resultados obtidos com a LagClus estão na Tabela 2. Nessas tabelas, as colunas referem-se a:

- Instância – Nome dado a instância;
- $L$  e  $W$  – Comprimento e largura do palete, respectivamente;
- $l$  e  $w$  – Comprimento e largura das caixas, respectivamente;
- Solução ótima – Solução ótima do problema;
- Limitante de área – Limitante trivial calculado como  $\lfloor (L * W) / (l * w) \rfloor$  (onde  $\lfloor z \rfloor$  é o maior inteiro menor ou igual a  $z$ );
- Limitante de Barnes – Limitante superior proposto por Barnes (1979);
- HVM – Melhor limitante inferior encontrado pela heurística HVM;
- LagClus – Melhor limitante superior fornecido pela relaxação lagrangeana com *clusters*;
- GAP LB (%) – *Gap* obtido entre a solução ótima e o melhor limitante encontrado com a HVM: 
$$GAP\ LB = \frac{(Solução\ ótima - HVM)}{Solução\ ótima} * 100$$
- GAP UB (%) – *Gap* obtido entre o limitante dado pelo relaxação lagrangeana com *clusters* e a solução ótima: 
$$GAP\ UB = \frac{(LagClus - Solução\ ótima)}{Solução\ ótima} * 100$$

- Tempo (s) – Tempo utilizado em segundos para a relaxação encontrar uma das condições de parada do algoritmo de subgradientes.

**Tabela 1:** Instâncias consideradas.

| Instância | $L$ | $W$ | $l$ | $w$ | Solução ótima |
|-----------|-----|-----|-----|-----|---------------|
| L1        | 32  | 22  | 5   | 4   | 34            |
| L2        | 32  | 27  | 5   | 4   | 42            |
| L3        | 40  | 26  | 7   | 4   | 36            |
| L4        | 40  | 33  | 7   | 4   | 46            |
| L5        | 53  | 26  | 7   | 4   | 48            |
| L6        | 37  | 30  | 8   | 3   | 45            |
| L7        | 81  | 39  | 9   | 7   | 49            |
| L8        | 100 | 64  | 17  | 10  | 36            |
| L9        | 100 | 82  | 22  | 8   | 45            |
| L10       | 100 | 83  | 22  | 8   | 45            |

O particionamento foi realizado utilizando o METIS de Karypis e Kumar (1998) que é uma heurística bem conhecida para particionamento de grafos. A mesma produz particionamentos de boa qualidade em um tempo computacional baixo. Para todas as instâncias testes (L1-L10) foram utilizados dois clusters, ou seja,  $\bar{P} = 2$ .

A codificação foi feita em C++ e os testes em um Pentium IV 2,66 GHz, com 512 MB de memória RAM. Para resolver os subproblemas foi utilizado o CPLEX 7.5 (ILOG, 2001).

**Tabela 2:** Resultados obtidos com a LagClus para o PCPP.

| Instância | Limitante de área | Limitante de Barnes | HVM | LagClus | GAP LB(%) | GAP UB(%) | Tempo (s) |
|-----------|-------------------|---------------------|-----|---------|-----------|-----------|-----------|
| L1        | 35                | 35                  | 34  | 35,0022 | 0,00      | 2,95      | 25,00     |
| L2        | 43                | 43                  | 42  | 43,0023 | 0,00      | 2,39      | 88,00     |
| L3        | 37                | 37                  | 36  | 37,0020 | 0,00      | 2,78      | 98,00     |
| L4        | 47                | 47                  | 46  | 47,0023 | 0,00      | 2,18      | 276,00    |
| L5        | 49                | 49                  | 48  | 49,0110 | 0,00      | 2,11      | 318,00    |
| L6        | 46                | 46                  | 45  | 46,0334 | 0,00      | 2,30      | 202,00    |
| L7        | 50                | 50                  | 49  | 49,9936 | 0,00      | 2,03      | 257,00    |
| L8        | 37                | 37                  | 36  | 37,0022 | 0,00      | 2,78      | 114,00    |
| L9        | 46                | 46                  | 45  | 46,0250 | 0,00      | 2,28      | 404,00    |
| L10       | 47                | 46                  | 45  | 46,0250 | 0,00      | 2,28      | 403,00    |

Como se pode perceber na Tabela 2, a heurística lagrangeana obteve todas as soluções ótimas dos problemas testes. Com relação ao limitante superior dado pela LagClus, o mesmo se aproximou bem do limitante inferior sendo superior em apenas uma caixa. A LagClus garantiu a solução ótima da instância L7, fornecendo um *gap* menor que uma caixa.

Verificada a eficiência da LagClus e da heurística lagrangeana, foram realizados experimentos computacionais com algumas instâncias reais do PEUC obtidos junto a alguns portos brasileiros. As Tabelas 3 e 4 mostram, respectivamente, as características das instâncias e resultados obtidos com a LagClus. Na Tabela 3, as colunas  $H$  e  $h$  representam, respectivamente, a altura do porão e altura da unidade de celulose. A última coluna representa o número de unidades estivadas pelo porto atualmente. Percebe-se que as soluções práticas presentes na Tabela 3, são, em alguns casos, 5 vezes maiores que as soluções ótimas da Tabela 1. Vale ressaltar ainda, que as maiores instâncias relatadas na literatura para o problema do carregamento de paletes são da ordem de 150 caixas.



A formulação do PEUC mostrada na Seção 2 foi aplicada nos problemas da Tabela 3, e o CPLEX 7.5 (ILOG, 2001) foi utilizado para tentar garantir a solução ótima. Entretanto, não foi possível obter resultados inteiros em mais de 10h de execução. Com isso, recorreu-se à relaxação lagrangeana com *clusters*.

**Tabela 3:** Instâncias consideradas para o PEUC.

| Instância | $L(cm)$ | $W(cm)$ | $H(cm)$ | $l(cm)$ | $w(cm)$ | $h(cm)$ | Solução porto |
|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------------|
| L11       | 2296    | 1230    | 1600    | 136     | 94      | 184     | 213           |
| L12       | 2536    | 1312    | 1600    | 144     | 84      | 190     | 269           |
| L13       | 2252    | 1470    | 1652    | 144     | 84      | 190     | 265           |
| L14       | 1470    | 1458    | 1652    | 144     | 84      | 190     | 170           |
| L15       | 2296    | 1230    | 1600    | 135     | 92      | 183     | 217           |
| L16       | 1804    | 1230    | 1600    | 137     | 95      | 190     | 158           |
| L17       | 2466    | 1230    | 1600    | 137     | 95      | 190     | 222           |
| L18       | 1804    | 1750    | 1600    | 137     | 95      | 190     | 234           |
| L19       | 2426    | 1230    | 1640    | 137     | 95      | 190     | 204           |

A Tabela 4 mostra os resultados obtidos com a LagClus. A segunda coluna indica o número de clusters utilizado no particionamento, e a coluna “Gap (%)” indica o *gap* encontrado entre os limitantes superior e inferior:  $Gap = \frac{(LagClus - HVM)}{LagClus} * 100$ .

**Tabela 4:** Resultados da LagClus para as instâncias do PEUC.

| Instância | No de clusters | Limitante de área | Limitante de Barnes | HVM | LagClus | GAP (%) | Tempo (s) |
|-----------|----------------|-------------------|---------------------|-----|---------|---------|-----------|
| L11       | 30             | 220               | 220                 | 219 | 220,01  | 0,46    | 4768      |
| L12       | 20             | 275               | 274                 | 273 | 274,48  | 0,54    | 24637     |
| L13       | 30             | 273               | 273                 | 271 | 272,52  | 0,56    | 9634      |
| L14       | 20             | 177               | 177                 | 175 | 176,28  | 0,73    | 2889      |
| L15       | 30             | 227               | 227                 | 226 | 228,66  | 1,16    | 6268      |
| L16       | 40             | 170               | 170                 | 168 | 170,45  | 1,44    | 907       |
| L17       | 30             | 233               | 233                 | 231 | 232,97  | 0,85    | 7460      |
| L18       | 30             | 242               | 242                 | 240 | 242,77  | 1,14    | 16249     |
| L19       | 30             | 229               | 229                 | 227 | 229,31  | 1,00    | 7384      |

Para esta relaxação não existe ainda alguma relação que permita estabelecer o número ideal de *clusters*, com isso, os números definidos na Tabela 4 foram obtidos de forma experimental evitando tempos excessivos, mas que permitissem obter bons limitantes e boas soluções factíveis em um tempo computacional não muito alto dada a dificuldade desse problema.

Os resultados mostrados na Tabela 4 são bem interessantes. Para a instância L12, a LagClus obteve um limitante melhor que o limitante de área. Nas instâncias L13, L14 e L17 os limitantes fornecidos pela LagClus foram melhores que os limitantes de área e o de Barnes juntos, porém, para a instância L15 o limitante não foi tão bom. Entretanto, esses limitantes podem ser melhorados variando o número de *clusters*.

A Tabela 5 faz uma análise geral dos resultados obtidos neste trabalho. A coluna “Diferença” representa a diferença entre a melhor solução dada pela heurística lagrangeana e a solução do porto. A coluna “Número de camadas” é calculada como sendo  $\lceil H/h \rceil$ .

Como pode ser observado, a LagClus em média conseguiu estar 8,67 unidades de celulose a mais por camada, o que dá 69,33 (1804,44 – 1735,11) unidades a mais por porão. Considerando uma média de 10 porões por navio, são aproximadamente 700 unidades a mais por carregamento. Dada a quantidade de viagens de um navio por ano, o total transportado a mais pode representar ganhos logísticos significativos em termos de tempo e de custos.

**Tabela 5:** Avaliação dos resultados.

| Instância | Quantidade por camada |         |           | Quantidade por porão |               |         |
|-----------|-----------------------|---------|-----------|----------------------|---------------|---------|
|           | Solução porto         | LagClus | Diferença | Número de camadas    | Solução porto | LagClus |
| L11       | 213                   | 219     | 6         | 8                    | 1704          | 1752    |
| L12       | 269                   | 273     | 4         | 8                    | 2152          | 2184    |
| L13       | 265                   | 271     | 6         | 8                    | 2120          | 2168    |
| L14       | 170                   | 175     | 5         | 8                    | 1360          | 1400    |
| L15       | 217                   | 226     | 9         | 8                    | 1736          | 1808    |
| L16       | 158                   | 168     | 10        | 8                    | 1264          | 1344    |
| L17       | 222                   | 231     | 9         | 8                    | 1776          | 1848    |
| L18       | 234                   | 240     | 6         | 8                    | 1872          | 1920    |
| L19       | 204                   | 227     | 23        | 8                    | 1632          | 1816    |
| Média     | 216,89                | 225,56  | 8,67      | 8                    | 1735,11       | 1804,44 |

## 5. CONCLUSÕES E PESQUISAS FUTURAS

Este trabalho apresentou o problema da estivagem de unidades de celulose em porões de navios especializados neste tipo de transporte. Como foi visto, este problema pode ser reduzido ao caso bidimensional e com isso, este trabalho apresentou uma formulação para o PEUC baseada na formulação proposta por Beasley (1985) para um caso mais geral de problemas de corte e empacotamento.

Mesmo com essa formulação, o CPLEX 7.5 não foi capaz de resolver tal problema. Sendo assim, recorreu-se a uma relaxação lagrangeana para obter limitantes. Como mostrado, o PEUC pode ser visto como um problema de máximo conjunto independente de vértices e conseqüentemente, um grafo de conflitos pode ser gerado. Com isso, a relaxação apresentada leva em consideração esse grafo e explora a questão dos grafos esparsos, possibilitando dividir o problema original (grafo original) em subproblemas menores (subgrafos) que podem ser facilmente resolvidos de forma independente.

Os resultados computacionais foram promissores mostrando que bons limitantes podem ser obtidos com esse tipo de relaxação. No entanto, a questão relativa ao número ideal de *clusters* ainda está em aberto, possibilitando pesquisa nessa área.

Os resultados computacionais sobre as instâncias reais do PEUC mostraram que a heurística lagrangeana proporcionou no geral, resultados melhores que os obtidos na prática, porém os *gaps* de dualidade não foram fechados.

Outra questão em aberto está relacionada aos porões maiores que comportam mais de 400 unidades de celulose por camada, por exemplo, um porão com dimensões  $(L,W)=(2560\text{cm}, 2270\text{cm})$  e unidades com dimensões  $(l,w)=(143\text{cm}, 84\text{cm})$ , apresenta solução prática de 455 unidades. No entanto, essas instâncias apresentam muitas variáveis e muitas restrições, o que limitou a aplicação da relaxação lagrangeana com *clusters* a instâncias “menores”.

## Agradecimentos

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq pelo apoio financeiro dado ao desenvolvimento deste trabalho.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aarts, E. e J. Korst (1989) *Simulated Annealing and Boltzmann Machines*. Chichester, UK: J. Wiley & Sons.
- Alvarez-Valdes, R.; F. Parreño e J. M. Tamarit (2005) A Branch-and-Cut Algorithm for the Pallet Loading Problem. *Computer and Operations Research*, v. 32, n. 11, p. 3007-3029.
- Balas, E. J. Xue (1996) Weighted and Unweighted Maximum Clique Algorithms with Upper Bounds from Fractional Coloring. *Algorithmica*, v. 15, n.5, p. 397-412.
- Barnes, E. R. (2000) A Branch-and-Bound Procedure for the Largest Clique in a Graph. In: Pardalos, P. M. (eds.) *Approximation and Complexity in Numerical Optimization: Continuous and Discrete Problems*. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Beasley, J. (1985) An Exact Two-Dimensional non Guillotine Cutting Tree Search Procedure. *Operations Research*, v. 33, p. 49-64.
- Bhattacharya, R.; R. Roy e S. Bhattacharya (1998) An Exact Depth-First Algorithm for the Pallet Loading Problem. *European Journal of Operational Research*, v. 110, p. 610-625.
- Branch, A. E. (1996) *Elements of Shipping* (7<sup>a</sup> ed.). Cheltenham: Nelson Thornes.
- Bomze, I. M.; M. Budinich; P. M. Pardalos e M. Pelilo (1999) The Maximum Clique Problem. In: Du, D. e P. M. Pardalos (eds.) *Handbook of Combinatorial Optimization*. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Bron, C. e J. Kerbosch (1973) Finding All Cliques of an Undirected Graph. *Communications of the ACM*, v. 16, n. 9, p. 575-577.
- Bui, T. N. e P. H. Eppley (1995) A Hybrid Genetic Algorithm for the Maximum Clique Problem. *Anais do Proceedings 6<sup>th</sup> International Conference on Genetic Algorithms*, v.1, p. 478-484.
- Dowland, K. (1987) An Exact Algorithm for the Pallet Loading Problem. *European Journal of Operational Research*, v. 31, p. 78-84.
- Dyckhoff, H. (1990) A Typology of Cutting and Packing Problems. *European Journal of Operational Research*, v. 44, p. 145-159.
- Feo, T. A.; M. G. C. Resende e S. H. Smith (1994) A Greedy Randomized Adaptive Search Procedure for Maximum Independent Set. *Operations Research*, v. 42, p. 860-878.
- Gendreau, M.; L. Salvail e P. Soriano (1999) Solving Maximum Clique Problem Using a Tabu Search Approach. *Annals of Operations Research*, v. 41, p. 385-403.
- Handabaka, A. R. (1994) *Gestão logística da distribuição física internacional*. São Paulo: Maltese.
- Held, M. e R. M. Karp (1971) The Traveling Salesman Problem and Minimum Spanning Trees: Part II. *Mathematical Programming*, v. 1, p. 6-25.
- Herbert, A. e K. Dowland (1996) A Family of Genetic Algorithm for the Pallet Loading Problem. In: Osman, I. H. e J. P. Kelly (eds.) *Metaheuristics: Theory and Applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 378-406.
- Hertz, A. (1990) A Fast Algorithm for Coloring Meyniel Graphs. *Journal of Combinatorial Theory B*, v. 50, n. 2, p. 231-240.
- Hodgson, T. (1982) A Combined Approach to the Pallet Loading Problem. *IIE Transactions*, v. 14, n. 3, p. 176-182.
- ILOG (2001) *CPLEX 7.5 Reference Manual*. 7.5v. 610p. ©Copyright by ILOG, France.
- Karypis, G. e V. Kumar (1998) Multilevel k-Way Partitioning Scheme for Irregular Graphs. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, v. 48, n. 1, p. 96-129.
- Kopf, R. e G. Ruhe (1987) A Computational Study of the Weighted Independent Set Problem for General Graphs. *Found. Control Engi.*, v. 12, n. 4, p. 167-180.
- Letchford, A. N. e A. Amaral (2001) Analysis of Upper Bounds for the Pallet Loading Problem. *European Journal of Operational Research*, v. 3, n. 132, p. 582-593.
- Morabito, R. e S. R. Morales (1998) A Simple and Effective Procedure for the Manufacturer's Pallet Loading Problem. *Journal of the Operational Research Society*, v. 49, p. 819-828.
- Narciso, M. G. e L. A. N. Lorena (1999) Lagrangean/Surrogate Relaxation for Generalized Assignment Problems. *European Journal of Operational Research*, 114: 165-177.
- Östergard, P. R. J. (2002) A Fast Algorithm for the Maximum Clique Problem. *Discrete Applied Mathematics*, v. 120, p. 197-207.
- Pureza, V. e R. Morabito (2005) Some Experiments with a Simple Tabu Search Algorithm for the Manufacturer's Pallet Loading Problem. *Computers and Operations Research*. To appear.

- Ribeiro, G. M. e L. A. N. Lorena (2004a) Modelagem Matemática e Relaxações Lagrangeana e Lagrangeana/Surrogate para o Problema da Rotulação Cartográfica de Pontos. *Anais do XXXVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, SBPO*, v.1.
- Ribeiro, G. M. e L. A. N. Lorena (2004b) Relaxação Lagrangeana com Formação de Clusters Aplicada a Rotulação Cartográfica de Pontos. *VIII Oficina Nacional sobre Problemas de Corte e Empacotamento & Correlatos*. Disponível em [http://www.lac.inpe.br/~lorena/glaydston/Glaydston\\_Lorena\\_Oficina.PDF](http://www.lac.inpe.br/~lorena/glaydston/Glaydston_Lorena_Oficina.PDF).
- Ribeiro, G. M. (2005) *Relaxação Lagrangeana com Divisão em Clusters para Alguns Problemas de Otimização Modelados em Grafos de Conflitos*. Proposta de Tese de Doutorado em Computação Aplicada, INPE. Disponível em [www.lac.inpe.br/~lorena/glaydston/proposta-glaydston.pdf](http://www.lac.inpe.br/~lorena/glaydston/proposta-glaydston.pdf).
- Silva, J. L. C.; N. Y. Soma e N. Maculan (2001) Uma Heurística para o Problema de Empacotamento de Bins Tridimensionais. *Anais XXI Encontro Nacional dos Estudantes de Engenharia de Produção*, ENGEP, Salvador, v. 1.
- Smith, A. e P. De Cani (1980) An algorithm to optimize the layout of boxes in pallets. *Journal of the Operational Research Society*, v. 31, p. 573-578.
- Young-Gun, G. e K. Maing-Kyu (2001) A Fast Algorithm for Two-Dimensional Pallet Loading Problems of Large Size. *European Journal of the Operational Research*, v. 134, p. 193-202.

UniAracruz - Faculdade de Aracruz<sup>1</sup>  
Departamento de Ciência da Computação e Informática  
R. Prof. Berilo Basílio dos Santos, 180, Bairro Vila Rica,  
Aracruz – ES. CEP 29194-910.

Fone: (027) 3256-1102  
Fax: (027) 3256-1102  
Email: [glaydston@fsjb.edu.br](mailto:glaydston@fsjb.edu.br)

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais<sup>1,2</sup>  
Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada  
Av. dos Astronautas, 1758, Jardim da Granja,  
São José dos Campos – SP. CEP 12.227-010

Fone: (012) 3945-6555  
Fax: (012) 3945-6357  
Email: [glaydston@lac.inpe.br](mailto:glaydston@lac.inpe.br)  
[lorena@lac.inpe.br](mailto:lorena@lac.inpe.br)