

MÉTODO DE GERAÇÃO DE COLUNAS PARA O PROBLEMA DO CARREGAMENTO DE PALETES DO PRODUTOR

Glaydston Mattos Ribeiro

Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
12.227-010, São José dos Campos – SP
glaydston@lac.inpe.br

Luiz Antonio Nogueira Lorena

Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
12.227-010, São José dos Campos – SP
lorena@lac.inpe.br

Resumo

O problema do carregamento de paletes é um problema clássico e consiste em arranjar o máximo possível de itens (caixas) iguais sobre um palete. Dado que se pode montar um grafo de conflitos para este problema, sendo os vértices as possíveis posições das caixas sobre o palete, e as arestas os possíveis conflitos entre essas posições, este problema pode ser visto como um problema de máximo conjunto independente de vértices. O presente trabalho vem propor um método de geração de colunas para este problema, observando que o grafo de conflitos obtido pode ser particionado, formando vários *clusters*. Os resultados computacionais foram interessantes e conseguiram obter as soluções ótimas de várias instâncias propostas na literatura.

Palavras-chave: Carregamento de paletes, Geração de colunas, Problemas de corte e empacotamento.

Abstract

The pallet loading problem is a classic problem and consists in arranging the maximum number of identical boxes onto a pallet. Given that we can produce a conflict graph for this problem, where the vertices are possible positions of the boxes on the pallet, and the edges represent the possible conflicts between these positions, this problem can be seen as a maximum independent set problem. So, this work proposes a column generation approach for this problem, observing that the conflict graph generated can be partitioned, forming several clusters. The computational results were interesting and we obtained the optimal solution for several instances reported in the literature.

Keywords: Pallet loading, Column generation, Cut and packing problems.

1. Introdução

O Problema do Carregamento de Paletes (PCP) consiste em: dado um conjunto de itens idênticos (caixas idênticas) com dimensões retangulares e um palete também retangular; procura-se otimizar a superfície do palete posicionando o máximo possível de caixas sobre o mesmo, sendo que as caixas não podem se sobrepor e todas elas devem estar posicionadas (empacotadas) sobre o palete, não podendo ultrapassar os limites de comprimento e largura do mesmo; elas ainda podem ser rotacionadas em 90° graus devendo estar com suas arestas paralelas às do palete. De acordo com Dyckhoff (1990), esse problema pode ser classificado como sendo 2/B/O/C (bidimensional, seleção de itens, objeto único, itens iguais), sendo assim, esse problema pertence a um caso especial de problemas de corte e empacotamento.

O PCP aparece freqüentemente na logística de distribuição de produtos e com isso, o número total de caixas empacotadas pode reduzir os custos logísticos dado que um pequeno incremento nesse número, pode estar representando uma economia significativa. Na literatura, existem dois tipos de problemas associados ao PCP (Hodgson, 1982): o Problema do Carregamento de Paletes do Produtor (PCPP) e o Problema do Carregamento de Paletes do Distribuidor (PCPD). No primeiro caso, as caixas possuem as mesmas dimensões, enquanto no segundo, apresentam dimensões diferentes. Em ambos os casos, as caixas são empacotadas em camadas horizontais. A Figura 1 apresenta um exemplo de como as caixas podem ser empacotadas conforme o tipo de problema.

Este trabalho considera o problema do produtor com empacotamento bidimensional, ou seja, dada uma altura h de uma camada, o problema consiste em colocar o máximo número de caixas de faces (l,w) , sobre a superfície (L,W) do palete. As faces das caixas podem ser colocadas nas duas posições horizontais possíveis em cada camada, isto é, (l,w) e (w,l) .

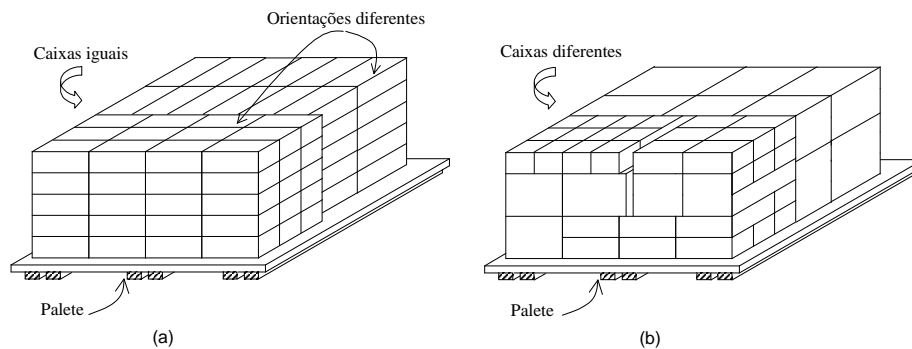


Figura 1 – Tipos de PCP: (a) Problema do Carregamento de Paletes do Produtor e (b) Problema do Carregamento de Paletes do Distribuidor (Adaptado de Morales e Morabito, 1997).

Considerando as diversas aplicações práticas desse problema, muitos métodos de solução têm sido estudados. Os algoritmos exatos existentes utilizam basicamente uma estrutura em árvore (Dowland, 1987a; Bhattacharya et al, 1998; Alvarez-Valdez et al, 2004). Devido às dificuldades existentes, vários outros métodos foram criados ou utilizados, entre eles estão os métodos construtivos que dividem o palete em blocos (Young-Gun e Maing-Kyu, 2001), métodos recursivos (Morabito e Morales, 1998) e métodos baseados em estruturas do tipo G4 (Scheithauer e Terno, 1996) e do tipo L (Lins et al, 2003). Existem outros trabalhos que aplicam as metaheurísticas conhecidas como Busca Tabu (Pureza e Morabito, 2005) e Algoritmos Genéticos (Herbert and Dowland, 1996). Existem também vários limitantes superiores que consideram a geometria do problema, o que permite avaliar a qualidade de uma solução.

Esse problema analisado sob outro ponto de vista, é o clássico Problema do Máximo Conjunto Independente de Vértices (PMCIIV) (Dowland, 1987). O PCPP pode ser representado através de um grafo de conflitos em que cada vértice, indica a localização do canto inferior esquerdo de uma caixa posta na horizontal ou vertical, e as arestas do grafo, as possíveis sobreposições das caixas.

Baseado nessa idéia e a de que o grafo de conflitos pode ser particionado, este trabalho vem propor um método de geração de colunas para o problema do carregamento de paletes do produtor. Inicialmente, na Seção 2 é apresentada a formulação deste problema conforme Beasley (1985). Em seguida, a Seção 3 apresenta a decomposição Dantzig-Wolfe proposta. Na Seção 4, são apresentados os passos necessários para se trabalhar com a decomposição proposta, assim como o método utilizado para gerar o conjunto inicial de colunas. Na Seção 5 são apresentados os resultados computacionais obtidos com a geração de colunas para um grupo de instâncias propostas na literatura. Por último, a Seção 6 apresenta as principais conclusões do trabalho assim como as pesquisas futuras.

2. Formulação do problema do carregamento de paletes do produtor

O PCPP pode ser formulado usando o caso particular da formulação de Beasley (1985) para o problema de corte não-guilhotinado bidimensional. Seja L e W o comprimento e a largura do palete, respectivamente, tal que $L \geq W$, e, l e w o comprimento e a largura das caixas, respectivamente, tal que $l \geq w$ e $l \leq \text{Min}(L, W)$. Para representar os possíveis modos de empacotar uma caixa, seja $(l_1, w_1) = (l, w)$ e $(l_2, w_2) = (w, l)$. Com isso, essas posições podem ser representadas por $(l_i, w_i)_{i=1,2}$, que indicam o comprimento e a largura de uma face na orientação i .

Para representar as posições das caixas no palete, seja X e Y dois conjuntos que juntos são utilizados para definir as coordenadas (p, q) do canto inferior esquerdo das caixas. Esses conjuntos podem ser descritos como:

$$X = \left\{ p \in Z^+ \mid p = \sum_{i=1}^2 l_i b_i, 0 \leq p \leq L - w, b_i \geq 0 \text{ e inteiro}, i = 1, 2 \right\} \quad (1)$$

$$Y = \left\{ q \in Z^+ \mid q = \sum_{i=1}^2 w_i b_i, 0 \leq q \leq W - w, b_i \geq 0 \text{ e inteiro}, i = 1, 2 \right\} \quad (2)$$

Seja a uma função que descreve as restrições de sobreposições no palete. Esta função pode ser obtida com antecedência para cada vértice (p, q) em relação a qualquer outro vértice (r, s) , para cada orientação i , sendo $p \in X \mid p \leq L - l_i$, $q \in Y \mid q \leq W - w_i$, $r \in X$, $s \in Y$, e $i = 1, 2$. Assim, essa função pode ser expressa como:

$$a_{ipqrs} = \begin{cases} 1, & \text{Se } 0 \leq p \leq r \leq p + l_i - 1 \leq L - 1 \text{ e } 0 \leq q \leq s \leq q + w_i - 1 \leq W - 1 \\ 0, & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad (3)$$

Agora, seja $x_{ipq} \in \{0, 1\}$ uma variável binária de decisão para todo $p \in X \mid p \leq L - l_i$, $q \in Y \mid q \leq W - w_i$, e $i = 1, 2$. Se $x_{ipq} = 1$, uma caixa é colocada nas coordenadas (p, q) do palete com a orientação i , caso contrário $x_{ipq} = 0$.

Com isso, o PCPP pode ser formulado como (Beasley, 1985):

$$v(PCPP) = \text{Max} \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{\{p \in X \mid p \leq L - l_i\}} \sum_{\{q \in Y \mid q \leq W - w_i\}} x_{ipq} \right) \quad (4)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{\{p \in X \mid p \leq L - l_i\}} \sum_{\{q \in Y \mid q \leq W - w_i\}} a_{ipqrs} x_{ipq} \leq 1, \quad \forall r \in X \text{ e } s \in Y \quad (6)$$

$$x_{ipq} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1 \dots 2, p \in X \text{ tal que } p \leq L - l_i, \text{ e } q \in Y \text{ tal que } q \leq W - w_i \quad (7)$$

A restrição definida pela Equação (6) garante a não existência de sobreposição de caixas e a Equação (7) que as variáveis de decisão são binárias.

Conforme citado anteriormente, este problema pode ser formulado como um Problema de Máximo Conjunto Independente de Vértices (PMCIIV). Esse problema é clássico, bastante estudado na literatura. O PMCIIV normalmente está embutido na aplicação e com isso, surge em vários campos como em teoria da codificação, visão computacional e estudos químicos (ver Bomze et al, 1999).

Devido a sua grande área de aplicação, existem várias técnicas de solução propostas na literatura. Técnicas exatas incluem enumeração explícita de conjuntos independentes de vértices (Bron e Kerbosch, 1973), *Branch-and-Bound* (Balas e Xue, 1996; Östergard, 2002), e formulações contínuas com *Branch-and-Bound* (Barnes, 2000). Além disso, várias heurísticas foram propostas como os algoritmos de contração de vértices (Hertz, 1990), e a heurística gulosa de Kopf e Ruhe (1987). Existem ainda heurísticas de busca local que procuram melhorar uma determinada solução dada, por exemplo, por uma heurística gulosa (ver Feo et al, 1994).

Por outro lado, várias metaheurísticas também já foram utilizadas para resolver o PMCIV. Aarts e Korst (1989) propuseram o uso da metaheurística *Simulated Annealing*, Bui e Eppley (1995) utilizaram Algoritmos Genéticos, e Gendreau et al (1999) trabalharam com Busca Tabu.

Sendo assim, o PMCIV pode ser modelado como segue. Considere $G=(V,E)$ um grafo tal que V representa um conjunto de vértices x_v e E um conjunto de arestas (u,v) sendo $u,v \in V$ e $u \neq v$. Considere ainda que não existem pesos relacionados aos vértices ou arestas. Assim, o problema de máximo conjunto independente de vértices consiste em obter um subconjunto $V' \subseteq V$ tal que todo par de vértices de V' não é adjacente, isto é, se $r, w \in V'$, então $(r, w) \notin E$. Com isso, o PMCIV pode ser modelado da seguinte maneira:

$$v(\text{PMCIV}) = \text{Max} \left(\sum_{v \in V} x_v \right) \quad (8)$$

Sujeito a:

$$x_u + x_v \leq 1 \quad \forall (u,v) \in E \quad (9)$$

$$x_u \in \{0,1\} \quad \forall u \in V \quad (10)$$

Se $x_v=1$ o vértice v está incluído no conjunto independente, caso contrário $x_v=0$. As restrições definidas pela Equação (9) garantem que dois vértices adjacentes não podem estar presentes simultaneamente na solução do problema. Já a Equação (10) indica que todas as variáveis x_v são binárias.

A formulação mostrada acima também pode ser utilizada para o PCPP, porém ela produz mais restrições que a formulação definida em (4)-(7). Isso decorre do fato de que a formulação de Beasley (1985) explora o uso das cliques, reduzindo assim o número de restrições. Por exemplo, considere um palete com dimensões $(L,W)=(5,4)$ e caixas $(l,w)=(3,2)$. A Figura 2(a) mostra a formulação produzida pelo modelo (4)-(7). Usando a abordagem dada pelo PMCIV, a Figura 2(b) mostra o grafo de conflitos obtido para o problema, e em (c) é apresentada a modelagem do PMCIV. Como previsto antes, o PMCIV gera mais restrições que a modelagem de Beasley (1985), entretanto elas estão consideradas implicitamente na formulação do PCPP.

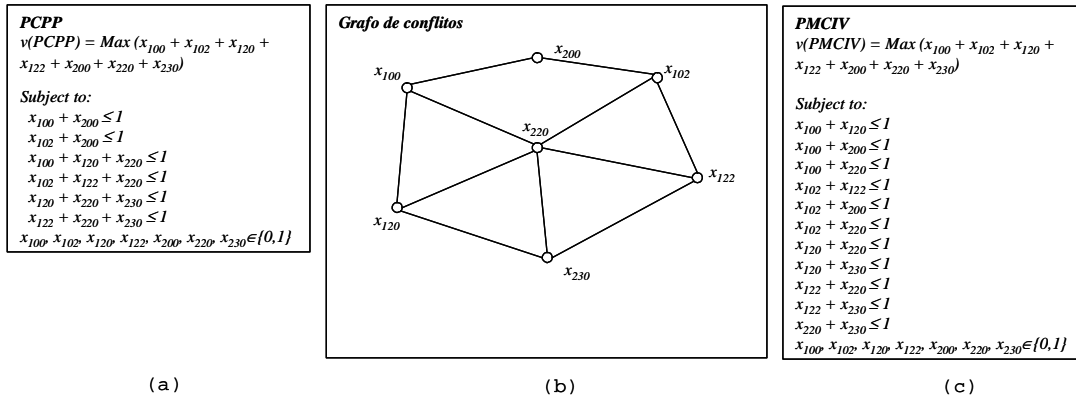


Figura 2 – Comparação entre a formulação de Beasley (1985) e a do PMCIV.

3. Decomposição Dantzig-Wolfe

A implementação clássica de geração de colunas, utiliza um problema coordenador e subproblemas geradores de colunas. O problema coordenador ou problema mestre restrito (PMR), através de suas variáveis duais, direciona os subproblemas na busca por novas colunas que trazem informações novas para o PMR.

Ribeiro e Lorena (2004a,b) apresentaram uma relaxação lagrangeana com divisão em clusters (LagClus) para o Problema da Rotulação Cartográfica de Pontos (PRCP). Recentemente, Ribeiro e Lorena (2005) apresentam resultados da LagClus para o PCPP, garantindo soluções ótimas para instâncias consideradas difíceis para uma relaxação lagrangeana.

A LagClus explora o fato de que várias aplicações modeladas em grafos de conflitos são bem adaptadas para uma fase de particionamento. A idéia de Ribeiro e Lorena (2004ab), surgiu do trabalho de Hicks et al (2004) no qual os autores desenvolveram um algoritmo *Branch-and-Price* para o Problema de Máximo Conjunto Independente de Vértices com Pesos (PMCIVP), que é semelhante ao PMCIV porém neste caso, os vértices apresentam pesos. Em seu trabalho, os autores particionam o grafo de conflitos, obtendo subgrafos (subproblemas) induzidos menores que são facilmente resolvidos. O problema original é então formulado usando a decomposição Dantzig-Wolfe (Bazaraa et al, 1990) e esses subproblemas passam a gerar colunas para a decomposição, resolvendo o problema original.

Usando a idéia do particionamento acima, a decomposição Dantzig-Wolfe de Hicks et al (2004) para o PMCIVP pode ser reformulada para o PMCIV, e conseqüentemente para o PCPP. Seja \bar{P} o número de clusters formado após o particionamento do grafo de conflitos G , como mostrado na Figura 2(b). Sendo assim, o PMCIV pode ser formulado como:

$$v(\text{PMCIV}) = \text{Max} \left(\sum_{p=1}^{\bar{P}} x_p \right) \quad (11)$$

Sujeito a:

$$+ A^1 x^1 + A^2 x^2 + \dots + A^{\bar{P}} x^{\bar{P}} \leq 1 \quad (12)$$

$$+ D^1 x^1 \leq 1$$

$$+ D^2 x^2 \leq 1$$

$$\dots \leq \vdots$$

$$+ D^{\bar{P}} x^{\bar{P}} \leq 1$$

$$x^1 \in B^{n_1} \quad \dots \quad x^{\bar{P}} \in B^{n_{\bar{P}}} \quad (14)$$

Sendo:

- A^p uma matriz binária de dimensão $M \times |V|$ que representa os coeficientes das variáveis x^p do cluster p presentes nas M restrições de adjacências entre clusters;
- D^p uma matriz binária de dimensão $|E|-M \times |V|$ que representa os coeficientes das variáveis x^p do cluster p presentes nas restrições de adjacências intra clusters;
- B^{n_p} um vetor de variáveis binárias do cluster p de comprimento n_p .

Como pode-se observar, o conjunto de restrições definido na Equação (12) se removido, permite dividir o problema em \bar{P} subproblemas distintos. Assim, aplicando a decomposição Dantzig-Wolfe para a relaxação de programação linear sobre o problema (11)-(14), conforme Hicks et al (2004), tem-se o seguinte PMR:

$$v(PMR)_{PL} = \text{Max} \left(\sum_{p=1}^{\bar{P}} \sum_{j \in J_p} \lambda_{jp} \bar{x}^{jp} \right) \quad (15)$$

Sujeito a:

$$\sum_{p=1}^{\bar{P}} \sum_{j \in J_p} \lambda_{jp} \left(A_p \bar{x}^{jp} \right) \leq 1 \quad (16)$$

$$\sum_{j \in J_p} \lambda_{jp} = 1 \quad \forall p \in \{1 \dots \bar{P}\} \quad (17)$$

$$\lambda_{jp} \geq 0 \quad \forall p \in \{1 \dots \bar{P}\} \text{ e } j \in J_p \quad (18)$$

Sendo:

- J_p um conjunto de pontos extremos do cluster p ;
- \bar{x}^{jp} um vetor de comprimento $|V_p|$ que representa o ponto extremo $j \in J_p$;
- λ_{jp} uma variável de decisão que representa o ponto extremo $j \in J_p$.

Os subproblemas $p \in \{1 \dots \bar{P}\}$ são todos PMCIV definidos como:

$$v(PMCIV^p) = \text{Max} \left\{ 1 - A_p^T \Delta \bar{x}^{jp} \right\} \quad (19)$$

Sujeito a:

$$D^p \bar{x}^{jp} \leq 1 \quad (20)$$

$$\bar{x}^{jp} \in B^{n_p} \quad (21)$$

Onde Δ é um vetor de comprimento M que representa as variáveis duais das restrições definidas pela Equação (16). Uma nova coluna, fornecida por um subproblema p , será inserida no PMR, se o seu custo reduzido for positivo, ou seja, $v(PMCIV^p) - \beta_p > 0$, sendo β_p a variável dual associada com a p -ésima restrição definida pela Equação (17).

Sendo assim, o PMR coordena as soluções dos subproblemas através de suas variáveis duais, objetivando uma solução para o problema original.

Ribeiro e Lorena (2005) utilizam a LagClus para obter bons limitantes duais para o PCPP. Eles utilizam um algoritmo de otimização do subgradiente para tal. Entretanto, a decomposição apresentada acima, também permite obter uma LagClus ($L_{\Delta} PMCIV$) para o PCPP, da seguinte maneira:

$$v(L_{\Delta} PMCIV) = \sum_{p=1}^{\bar{P}} \left\{ v(PMCIV^p) \right\} + \sum_{\delta_i \in \Delta} \delta_i \quad (22)$$

Resultados computacionais mostrados na Seção 5, comprovam esta afirmação.

4. Grafo de conflitos, particionamento e conjunto inicial de colunas

A decomposição Dantzig-Wolfe mostrada nas Equações (15)-(18), pode ser aplicado ao PCPP sendo necessário montar e particionar o grafo de conflitos. Com isso, são necessários os seguintes passos:

1. Montar o grafo de conflitos G a partir da modelagem do PCPP e aplicar uma heurística de particionamento neste grafo, dividindo-o em \bar{P} clusters;

2. Analisar as restrições (cliques) presentes no PCPP. Se em uma determinada clique existirem pares de vértices que pertencem a um mesmo *cluster*, adicionar ao respectivo *cluster* uma restrição de adjacência entre cada par encontrado;
3. As cliques que apresentam vértices em mais de um *cluster*, deverão formar as restrições definidas na Equação (12).

As etapas acima, permitem obter para a formulação do PCPP, a mesma estrutura mostrada para a modelagem do PMCIV definida em (11)-(14). Deve-se observar que no passo 2, cliques com vértices pertencentes a mais de um *cluster* devem ser decompostas, e cada uma de suas arestas analisada. Se uma aresta conecta dois vértices de um mesmo *cluster*, a mesma deve ser acrescentada no respectivo *cluster*. Esse procedimento evita que restrições (arestas) pertencentes aos *clusters* deixem de ser consideradas, e conseqüentemente, que colunas inválidas sejam geradas.

A Figura 3 exemplifica a questão do particionamento. Na Figura 3(a) têm-se dois agrupamentos (*clusters*) bem definidos, em (b) pode-se observar separadamente as arestas que conectam estes *clusters* que, se removidas, formam dois subgrafos (ou dois subproblemas) com as mesmas características do problema original (ver Figura 3(c)). Com isso, cada *cluster* p vai gerar uma coluna para a decomposição Dantzig-Wolfe, que na verdade, representa uma solução do *cluster* p .

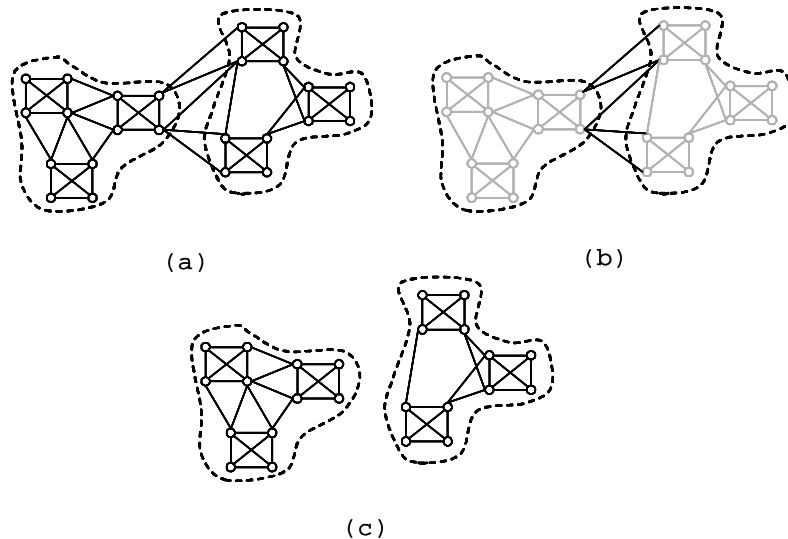


Figura 3 – Esquema de particionamento. (a) Grafo de conflitos, (b) arestas de conexão ou arestas entre *clusters* e (c) *clusters* ou subproblemas geradores de colunas.

Ribeiro e Lorena (2005) relaxam, no sentido lagrangeano, as restrições definidas na Equação (12), pois estas formam o conjunto das restrições entre *clusters*.

Para gerar o conjunto inicial de colunas, foi utilizada uma adaptação da heurística RSF (*Recursive-Smalest-First*), proposta por Yamamoto e Lorena (2005). A heurística RSF inicia escolhendo um vértice x de grau mínimo, em seguida, ela torna o vértice escolhido e seus vértices adjacentes inativos. A partir da lista de vértices ativos, é calculado novamente o grau de cada vértice, e em seguida, um novo vértice de grau mínimo é selecionado, e o ciclo é então repetido. O algoritmo termina quando não houver mais vértices ativos. Os vértices escolhidos formam um conjunto independente de vértices, no caso do PCPP um *layout* (uma solução) das caixas sobre o palete.

A RSF foi usada da seguinte maneira para gerar o conjunto inicial de colunas do PCPP. Primeiro, ao invés de escolher o vértice de grau mínimo, escolhe-se aleatoriamente um vértice x . Em seguida, o vértice escolhido e seus vértices adjacentes são colocados inativos. Daí em diante, o processo é idêntico ao da heurística original, ou seja, calcula-se o grau de cada um dos vértices restantes e aquele de menor grau é escolhido, novamente o vértice escolhido e seus vértices adjacentes são colocados inativos, e o processo é repetido. Quando a heurística termina, os vértices selecionados formam uma

solução para o PCPP. Todo esse algoritmo é repetido até que se obtenha o número desejado de soluções. Sendo ND esse número, o número de colunas adicionadas no PMR é igual a $ND * \bar{P}$, pois cada *cluster* gera uma coluna.

5. Resultados computacionais

Na literatura, existem vários trabalhos que relatam instâncias testes como em Dowsland (1987), Letchford e Amaral (2001), Morales e Morabito (1997), Alvarez-Valdez et al (2004) e Pureza e Morabito (2005). Outros trabalhos relatam instâncias testes obtidas de problemas reais junto a transportadoras como em Morabito et al (2000) e em Morabito e Farago (2002). Este trabalho no entanto, apresenta resultados somente para as instâncias propostas por Letchford e Amaral (2001), consideradas difíceis para uma relaxação lagrangeana. As características das instâncias são mostradas na Tabela 1, e os resultados encontrados com a geração de colunas estão na Tabela 2.

O particionamento foi realizado utilizando o METIS de Karypis e Kumar (1998) que é uma heurística bem conhecida para particionamento de grafos. A mesma produz particionamentos de boa qualidade em um tempo computacional baixo. Para todas as instâncias testes foram utilizados dois clusters, ou seja, $\bar{P} = 2$.

A codificação foi feita em C++ e os testes em um Pentium IV 2,66 GHz, com 512 MB de memória RAM. Para resolver os subproblemas geradores de colunas, assim como o PMR, foi utilizado o CPLEX 7.5 (ILOG, 2001).

Nas Tabelas 1 e 2, as colunas referem-se a:

- Instância – Nome dado a instância;
- W e L – Largura e comprimento do palete, respectivamente;
- w e l – Largura e comprimento das caixas, respectivamente;
- Solução ótima – Solução ótima do problema;
- Número inicial de colunas – Número inicial de colunas obtidas com a heurística RSF;
- Resultado inicial (PMR) – Valor da função objetivo para o PMR, considerando somente o conjunto inicial de colunas;
- Número final de colunas – Número final de colunas obtido quando o processo de geração foi encerrado;
- Resultado final (PMR) – Valor da função objetivo para o PMR com o número final de colunas;
- Tempo 1 (s) – Tempo em segundos utilizado pelo processo de geração de colunas;
- Solução – Representa o valor da função objetivo para o PMR convertido em um problema inteiro binário;
- Tempo 2 (s) – Tempo em segundos para resolver o PMR convertido em um problema inteiro binário.

Neste trabalho, optou-se por parar o processo de geração de colunas quando nenhuma coluna de custo reduzido positivo pudesse entrar no PMR. Não foi utilizada também, nenhuma técnica de eliminação de colunas.

Tabela 1 – Instâncias consideradas.

| Instância | L | W | l | w | Solução ótima |
|-----------|-----|-----|-----|-----|---------------|
| L1 | 32 | 22 | 5 | 4 | 34 |
| L2 | 32 | 27 | 5 | 4 | 42 |
| L3 | 40 | 26 | 7 | 4 | 36 |
| L4 | 40 | 33 | 7 | 4 | 46 |
| L5 | 53 | 26 | 7 | 4 | 48 |
| L6 | 37 | 30 | 8 | 3 | 45 |
| L7 | 81 | 39 | 9 | 7 | 49 |
| L8 | 100 | 64 | 17 | 10 | 36 |
| L9 | 100 | 82 | 22 | 8 | 45 |
| L10 | 100 | 83 | 22 | 8 | 45 |

Como pode-se perceber pela Tabela 2, os resultados validam a decomposição utilizada neste trabalho, embora os tempos computacionais tenham sido, em alguns casos, elevados. Mas vale ressaltar que não foi utilizada nenhuma técnica de eliminação de colunas improdutivas, ou parada prematura do processo de geração devido algum critério pré-estabelecido. Por outro lado, após gerar todas as colunas, o PMR obtido e resolvido de forma inteira, apresentou as soluções ótimas em um tempo razoável, inferior a 5,10s em todas as instâncias.

A Figura 4 mostra o comportamento do processo de geração de colunas e relaxação lagrangeana com clusters definida na Equação (22). Pode-se perceber que, conforme o número de iterações, os dois limitantes tendem a se igualarem, muito próximo de um limite teórico dado por $\lfloor (L * W) / (l * w) \rfloor$ (onde $\lfloor z \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a z), também conhecido por limitante de área.

Tabela 2 – Resultados obtidos com a Geração de Colunas.

| Instância | Processo de Geração de Colunas | | | | | Resolvendo o PMR final de forma inteira (PLI) | |
|-----------|--------------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------------------|-------------|---|-------------|
| | Número inicial de colunas | Resultado inicial (PMR) | Número final de colunas | Resultado final (PMR) | Tempo 1 (s) | Solução | Tempo 2 (s) |
| L1 | 500 | 34,00 | 626 | 35,00 | 17 | 34 | 0,00 |
| L2 | 500 | 41,00 | 674 | 43,00 | 45 | 42 | 0,20 |
| L3 | 500 | 35,16 | 697 | 37,00 | 62 | 36 | 0,00 |
| L4 | 500 | 45,00 | 680 | 47,00 | 183 | 46 | 2,00 |
| L5 | 500 | 47,20 | 691 | 49,00 | 286 | 48 | 1,00 |
| L6 | 500 | 44,00 | 829 | 46,00 | 194 | 45 | 0,00 |
| L7 | 500 | 49,00 | 815 | 49,85 | 2166 | 49 | 1,00 |
| L8 | 500 | 36,00 | 645 | 37,00 | 27 | 36 | 0,00 |
| L9 | 500 | 44,00 | 813 | 46,00 | 331 | 45 | 4,01 |
| L10 | 500 | 44,00 | 813 | 46,00 | 326 | 45 | 5,10 |

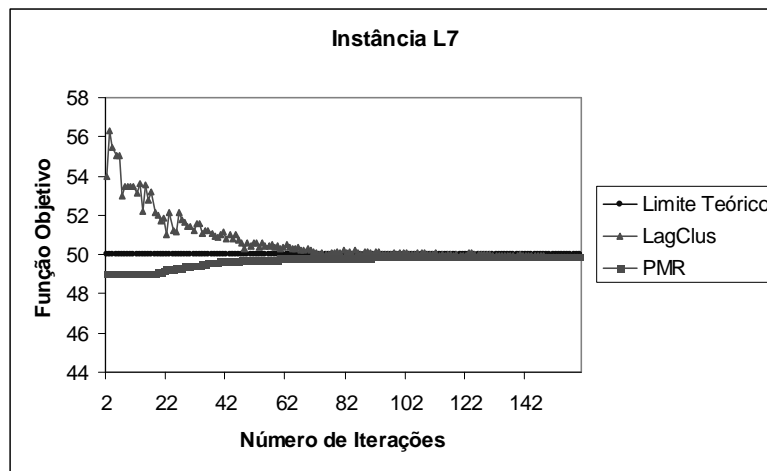


Figura 4 – Comportamento do problema mestre restrito e da LagClus definida na Equação (22).

6. Conclusões e pesquisas futuras

Este trabalho apresentou um método de geração de colunas para o problema do carregamento de paletes do produtor. Um paralelo com o problema do máximo conjunto independente de vértices foi feito, dado que a decomposição apresentada está baseada na formação de clusters obtidos a partir do particionamento do grafo de conflitos.

Os resultados obtidos foram interessantes apesar do tempo computacional, em alguns casos, estarem elevados. Porém, os problemas mestres restritos obtidos ao final do processo de geração de colunas, quando resolvidos de forma inteira, forneceram as soluções ótimas conhecidas dos problemas testes.

Outra questão interessante é que a relaxação lagrangeana com formação de clusters proposta por Ribeiro e Lorena (2004ab), pôde ser obtida de forma indireta, como mostrou o gráfico da Figura 3. Apesar do limitante fornecido por esta relaxação oscilar muito no início do processo de geração, ao final, os dois limitantes (da relaxação e do problema mestre) tendem a se igualar.

Está em fase de estudo, a aplicação de técnicas de redução que permitam eliminar colunas improdutivas, e técnicas que parem o processo de geração de colunas, assim que este atingir um determinado valor, como por exemplo o limitante de área descrito anteriormente. Espera-se com isso, reduzir o tempo computacional e obter problemas mestres tão bons quanto os obtidos quando o processo de geração segue até o fim. Além disso, também está sendo desenvolvido um algoritmo *Branch-and-Price* para este problema, que utiliza a decomposição mostrada. Técnicas de separação e descida na árvore de busca, também estão sendo estudadas. Espera-se ao final, obter um *Branch-and-Price* capaz de resolver PCPPs considerados difíceis de serem resolvidos de forma exata.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq pelo apoio financeiro dado ao desenvolvimento deste trabalho.

Referências Bibliográficas

- 1) Aarts, E. e Korst, J. **Simulated Annealing and Boltzmann Machines**. Chichester, UK: J. Wiley & Sons, 1989.
- 2) Alvarez-Valdez, R.; Parreño, F. e Tamarit, J. M. A branch-and-cut algorithm for the pallet loading problem. **Computer and Operations Research**, 2004. In press.
- 3) Balas, E. e Xue, J. Weighted and unweighted maximum clique algorithms with upper bounds from fractional coloring. **Algorithmica**, v. 15, n.5, p. 397-412, 1996.
- 4) Barnes, E. R. A branch-and-bound procedure for the largest clique in a graph. In: Pardalos, P. M. (ed.) **Approximation and Complexity in Numerical Optimization: Continuous and Discrete Problems**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- 5) Bazaraa, M. S.; Jarvis, J. J. e Sherali, H. D. **Linear programming and network flows**. New York: Jhon Wiley & Sons, 1990. 2nd Edition.
- 6) Beasley, J. An exact two-dimensional non guillotine cutting tree search procedure. **Operations Research**, v. 33, p. 49-64, 1985.
- 7) Bhattacharya, R.; Roy, R.; e Bhattacharya, S. An exact depth-first algorithm for the pallet loading problem. **European Journal of Operational Research**, v. 110, p. 610-625, 1998.
- 8) Bomze, I. M.; Budinich, M.; Pardalos, P. M. e Pelilo, M. The maximum clique problem. In: Du, D. e Pardalos, P. M. (eds) **Handbook of Combinatorial Optimization**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- 9) Bron, C. e Kerbosch, J. Finding all cliques of an undirected graph. **Communications of the ACM**, v. 16, n. 9, p. 575-577, 1973.
- 10) Bui, T. N. e Eppley, P. H. A hybrid genetic algorithm for the maximum clique problem. In: Proceedings 6th International Conference on Genetic Algorithms. **Anais**, p. 478-484, 1995.
- 11) Dowsland, K. An exact algorithm for the pallet loading problem. **European Journal of Operational Research**, v. 31, p. 78-84, 1987.
- 12) Dyckhoff, H. A typology of cutting and packing problems. **European Journal of Operational Research**, v. 44, p. 145-159, 1990.
- 13) Feo, T. A.; Resende, M. G. C. e Smith, S. H. A greedy randomized adaptive search procedure for maximum independent set. **Operations Research**, v. 42, p. 860-878, 2000.
- 14) Gendreau, M.; Salvail, L. e Soriano, P. Solving maximum clique problem using a tabu search approach. **Annals of Operations Research**, v. 41, p. 385-403, 1999.
- 15) Herbert, A. e Dowsland, K. A family of genetic algorithm for the pallet loading problem> In: Osman, I. H. e Kelly, J. P., editors. **Metaheuristics: theory and applications**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 378-406, 1996.
- 16) Hertz, A. A fast algorithm for coloring Meyniel graphs. **Journal of Combinatorial Theory B**, v. 50, n. 2, p. 231-240, 1990.
- 17) Hicks, I. V.; Warren, J. S.; Warriar, D. e Wilhenlm, W. E. **A branch-and-price approach for the maximum weight independent set problem**. Texas A & M University: Department of Industrial Engineering, 2004. Disponível em <http://ie.tamu.edu/People/faculty/Hicks>. Acesso em: 22/01/04.

- 18) Hodgson, T. A combined approach to the pallet loading problem. **IIE Transactions**, v. 14, n. 3, p. 176-182, 1982.
- 19) **ILOG CPLEX 7.5 Reference Manual**. 7.5v. 610p. ©Copyright by ILOG, France, 2001.
- 20) Karypis, G. e Kumar, V. Multilevel k-way partitioning scheme for irregular graphs. **Journal of Parallel and Distributed Computing**, v. 48, n. 1, p. 96-129, 1998.
- 21) Kopf, R. e Ruhe, G. A computational study of the weighted independent set problem for general graphs. **Found. Control Engi.**, v. 12, n. 4, p. 167-180, 1987.
- 22) Letchford, A.N. e Amaral, A. Analysis of upper bounds for the pallet loading problem. **European Journal of Operational Research**, v. 3, n. 132, p. 582-593, 2001.
- 23) Lins, L.; Lins, S. e Morabito, R. An L-approach for packing (l,w) -rectangles into rectangular and L-shaped pieces. **Journal of the Operational Research Society**, v. 54, p. 777-789, 2003.
- 24) Morabito, R. e Farago, R. A tight lagrangean relaxation bound for the manufacturer's pallet loading problem. **Studia Informatica Universalis**, v. 2, n. 1, p. 57-76, 2002.
- 25) Morabito, R. e Morales, S. R. A simple and effective procedure for the manufacturer's pallet loading problem. **Journal of the Operational Research Society**, v. 49, p. 819-828, 1998.
- 26) Morabito, R.; Morales, S. R. e Widmer, J. A. Loading optimization of palletized products on trucks. **Transportation Research Part E**, v. 36, p. 285-296, 2000.
- 27) Morales, S. R. e Morabito, R. Uma heurística simples e eficaz para o resolver o problema do carregamento de paletes do produtor. **Gestão & Produção**, v. 4, n. 1, p. 52-75, 1997.
- 28) Östergard, P. R. J. A fast algorithm for the maximum clique problem. **Discrete Applied Mathematics**, v. 120, p. 197-207, 2002.
- 29) Pureza, V. e Morabito, R. Some experiments with a simple tabu search algorithm for the manufacturer's pallet loading problem. **Computers and Operations Research**, 2005. To appear.
- 30) Ribeiro, G. M. e Lorena, L. A. N. Modelagem matemática e relaxações Lagrangeana e Lagrangeana/Surrogate para o problema da rotulação cartográfica de pontos. In: **Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO)**, 2004a.
- 31) Ribeiro, G. M. e Lorena, L. A. N. Relaxação Lagrangeana com formação de clusters aplicada a rotulação cartográfica de pontos. In: **VIII Oficina Nacional sobre Problemas de Corte e Empacotamento & Correlatos**, 2004b. Disponível em http://www.lac.inpe.br/~lorena/glaydston/Glaydston_Lorena_Oficina.PDF.
- 32) Ribeiro, G. M. e Lorena, L. A. N. Relaxação Lagrangeana com clusters aplicada ao problema do carregamento de paletes. In: **I Encontro Norte-Nordeste de Pesquisa Operacional e Matemática Computacional**, 2005. Submetido.
- 33) Scheithauer, G. e Terno, J. The G4-heuristic for the pallet loading problem. **Journal of the Operational Research Society**, v. 47, p. 511-522, 1996.
- 34) Yamamoto, M. e Lorena, L. A. N. A constructive genetic approach to point-feature cartographic label placement. In: Ibaraki, T.; Nonobe, K.; Yagiura, M. (eds) **Metaheuristics: Progress as Real Problem Solvers**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2005.
- 35) Young-Gun, G. e Maing-Kyu, K. A fast algorithm for two-dimensional pallet loading problems of large size. **European Journal of the Operational Research**, v. 134, p. 193-202, 2001.