

# RELAXAÇÃO LAGRANGEANA COM CLUSTERS APLICADA AO PROBLEMA DO CARREGAMENTO DE PALETES

Glaydston Mattos Ribeiro<sup>1</sup>  
Luiz Antonio Nogueira Lorena<sup>2</sup>

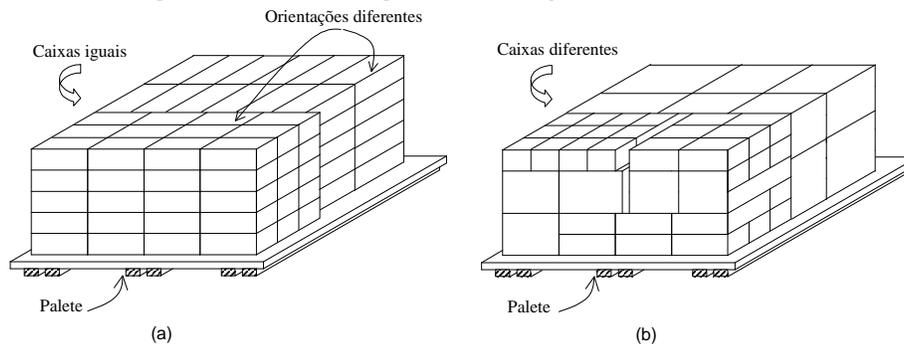
Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada  
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais  
12.227-010, São José dos Campos – SP  
email: {glaydston<sup>1</sup>, lorena<sup>2</sup>}@lac.inpe.br

## Resumo

O problema do carregamento de paletes consiste em arranjar o máximo possível de itens (caixas) iguais sobre um palete. Este problema pode ser visto como um problema de máximo conjunto independente de vértices, sendo assim, um grafo de conflitos pode ser definido para o problema. Com isso, dado que esse grafo pode ser particionado, este trabalho vem propor a utilização de uma relaxação lagrangeana com *clusters* para esse problema. Os resultados obtidos comprovam a eficiência desta relaxação, pois a mesma foi capaz de comprovar a optimalidade de problemas considerados difíceis.

## 1. Introdução

Na literatura, o Problema do Carregamento de Paletes (PCP) pode ser definido como o problema de carregar itens (caixas) sobre um palete retangular, de maneira a maximizar o número de caixas posicionadas. No entanto, estas caixas devem ser colocadas (empacotadas) ortogonalmente, isto é, com seus lados paralelos aos lados do palete. Esse problema aparece em vários problemas práticos ligados as atividades logísticas de armazenagem e distribuição.



**Figura 1** – Tipos de PCP: (a) Problema do Carregamento de Paletes do Produtor e (b) Problema do Carregamento de Paletes do Distribuidor (Adaptado de Morales e Morabito (1997)).

Existem dois tipos de problemas associados ao PCP. O Problema do Carregamento de Paletes do Produtor (PCPP) e o Problema do Carregamento de Paletes do Distribuidor (PCPD) (Hodgson, 1982). No primeiro caso, as caixas que devem ser empacotadas possuem as mesmas dimensões, enquanto no segundo, apresentam dimensões diferentes. Em ambos os casos, as caixas são empacotadas em camadas horizontais. A Figura 1 apresenta um exemplo de como as caixas podem ser empacotadas conforme o tipo de problema.

Este trabalho considera o problema do produtor com empacotamento bidimensional, ou seja, dada uma altura  $h$  de uma camada, o problema consiste em colocar o máximo número de caixas de faces  $(l, w)$ , sobre a superfície  $(L, W)$  do palete. As faces das caixas podem ser colocadas nas duas posições horizontais possíveis em cada camada, isto é,  $(l, w)$  e  $(w, l)$ .

De acordo com Dyckhoff (1990), o PCPP pode ser classificado como sendo 2/B/O/C (bidimensional, seleção de itens, objeto único, itens iguais), sendo assim, esse problema pertence a um caso especial de problemas de corte e empacotamento. Considerando as diversas aplicações práticas desse problema, muitos métodos de solução têm sido estudados. Os algoritmos exatos existentes

utilizam basicamente uma estrutura em árvore (Dowland, 1987a; Bhattacharya et al, 1998; Alvarez-Valdez et al, 2004). Devido às dificuldades existentes, vários outros métodos foram criados ou utilizados, entre eles estão os métodos construtivos que dividem o palete em blocos (Young-Gun e Maing-Kyu, 2001), métodos recursivos (Young-Gun e Maing-Kyu, 1998) e métodos baseados em estruturas do tipo G4 (Scheithauer e Terno, 1996) e do tipo L (Lins et al, 2003). Existem outros trabalhos que aplicam as metaheurísticas conhecidas como Busca Tabu (Pureza e Morabito, 2005) e Algoritmos Genéticos (Herbert and Dowland, 1996). Existem também vários limitantes superiores que consideram a geometria do problema, o que permite avaliar a qualidade de uma solução.

Esse problema analisado sob outro ponto de vista, é o clássico Problema do Máximo Conjunto Independente de Vértices (PMCIIV), como descrito por Dowland (1987a). Com isso, o PCPP pode ser representado através de um grafo de conflitos em que cada vértice indica a localização do canto inferior esquerdo de uma caixa posta na horizontal ou vertical, e as arestas do grafo, as possíveis sobreposições das caixas.

## 2. Formulação do problema do carregamento de paletes

O PCP pode ser formulado usando o caso particular da formulação de Beasley (1985) para o problema de corte não-guilhotinado bidimensional. Seja  $L$  e  $W$  o comprimento e a largura do palete, respectivamente, tal que  $L \geq W$ , e,  $l$  e  $w$  o comprimento e a largura das caixas, respectivamente, tal que  $l \geq w$  e  $l \leq \text{Min}(L, W)$ . Para representar os possíveis modos de empacotar uma caixa, seja  $(l_i, w_i) = (l, w)$  e  $(l_2, w_2) = (w, l)$ . Com isso, essas posições podem ser representadas por  $(l_i, w_i)_{i=1,2}$ , que indicam o comprimento e a largura de uma face na orientação  $i$ .

Para representar as posições das caixas no palete, seja  $X$  e  $Y$  dois conjuntos que juntos são utilizados para definir as coordenadas  $(p, q)$  do canto inferior esquerdo das caixas. Esses conjuntos podem ser descritos como:

$$X = \left\{ p \in Z^+ \mid p = \sum_{i=1}^2 l_i b_i, 0 \leq p \leq L - w, b_i \geq 0 \text{ e inteiro}, i = 1, 2 \right\} \quad (1)$$

$$Y = \left\{ q \in Z^+ \mid q = \sum_{i=1}^2 w_i b_i, 0 \leq q \leq W - w, b_i \geq 0 \text{ e inteiro}, i = 1, 2 \right\} \quad (2)$$

Seja  $a$  uma função que descreve as restrições de sobreposições no palete. Esta função pode ser obtida com antecedência para cada vértice  $(p, q)$  em relação a qualquer outro vértice  $(r, s)$ , para cada orientação  $i$ , sendo  $p \in X \mid p \leq L - l_i$ ,  $q \in Y \mid q \leq W - w_i$ ,  $r \in X$ ,  $s \in Y$ , e  $i = 1, 2$ . Assim, essa função pode ser expressa como:

$$a_{ipqrs} = \begin{cases} 1, & \text{Se } 0 \leq p \leq r \leq p + l_i - 1 \leq L - 1 \text{ e } 0 \leq q \leq s \leq q + w_i - 1 \leq W - 1 \\ 0, & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad (3)$$

Agora, seja  $x_{ipq} \in \{0, 1\}$  uma variável binária de decisão para todo  $p \in X \mid p \leq L - l_i$ ,  $q \in Y \mid q \leq W - w_i$ , e  $i = 1, 2$ . Se  $x_{ipq} = 1$ , uma caixa é colocada nas coordenadas  $(p, q)$  do palete com a orientação  $i$ , caso contrário  $x_{ipq} = 0$ .

Com isso, o PCPP pode ser formulado como (Beasley, 1985):

$$v(PCPP) = \text{Max} \left( \sum_{i=1}^2 \sum_{\{p \in X \mid p \leq L - l_i\}} \sum_{\{q \in Y \mid q \leq W - w_i\}} x_{ipq} \right) \quad (4)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{\{p \in X \mid p \leq L - l_i\}} \sum_{\{q \in Y \mid q \leq W - w_i\}} a_{ipqrs} x_{ipq} \leq 1, \quad \forall r \in X \text{ e } s \in Y \quad (6)$$

$$x_{ipq} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1 \dots 2, p \in X \text{ tal que } p \leq L - l_i, \text{ e } q \in Y \text{ tal que } q \leq W - w_i \quad (7)$$

A restrição definida pela Equação (6) garante a não existência de sobreposição de caixas e a Equação (7) que as variáveis de decisão são binárias.

### 3. Relaxação lagrangeana com *clusters*

Conforme citado anteriormente, este problema pode ser formulado como um PMCIIV. Com isso, a partir da formulação de Beasley (1985), um grafo de conflitos pode ser obtido. A relaxação Lagrangeana com *Clusters* (LagClus) explora o fato de que muitos problemas podem ser modelados em grafos de conflitos, e em alguns casos, esses são bem adaptados para uma fase de particionamento (Ribeiro e Lorena, 2004ab). Sendo assim, a LagClus pode ser aplicada da seguinte maneira:

- Montar o grafo de conflitos a partir da modelagem do PCPP e aplicar uma heurística de particionamento do grafo, dividindo-o em  $P$  *clusters*;
- Relaxar as restrições presentes no PCPP que apresentam vértices em mais de um *cluster*. Em cada uma delas, analisar se existem pares de vértices que pertencem a um mesmo *cluster*, se existir, adicionar ao respectivo cluster uma restrição de adjacência entre cada par encontrado;
- A relaxação lagrangeana obtida é dividida em  $P$  subproblemas e resolvida.

O algoritmo de subgradientes implementado foi o mesmo apresentado por Narciso e Lorena (1999), com os critérios de parada idênticos aos utilizados por Held e Karp (1971). Maiores detalhes sobre a LagClus podem ser obtidos em Ribeiro e Lorena (2004ab).

**Tabela 1** – Resultados obtidos com a LagClus para o PCPP.

Instância	$L$	$W$	$L$	$w$	Solução Ótima*/Melhor Conhecida	Limite Inferior	Limite Superior	GAP LB(%)	GAP UB(%)	Tempo (s)
L1	32	22	5	4	34*	34	35,0021	0,00	2,95	160
L2	32	27	5	4	42*	42	43,0059	0,00	2,39	150
L3	40	26	7	4	36*	36	37,0016	0,00	2,78	160
L4	40	33	7	4	46*	46	47,0027	0,00	2,18	159
L5	53	26	7	4	48*	48	49,0126	0,00	2,11	147
L6	37	30	8	3	45*	45	46,0402	0,00	2,32	159
L7	81	39	9	7	49*	49	49,9554	0,00	1,95	90
L8	100	64	17	10	36*	36	37,0021	0,00	2,78	147
L9	100	82	22	8	45*	45	46,0137	0,00	2,25	150
L10	100	83	22	8	45*	45	46,0137	0,00	2,25	150
L11	57	53	7	5	85*	80	86,3259	5,88	1,56	302
L12	84	75	11	6	94*	92	95,5313	2,12	1,62	1180
L13	151	131	19	11	94*	90	94,3784	4,25	0,40	3601
L14	61	38	6	5	77*	75	77,2133	2,60	0,28	168
L15	100	53	9	7	83*	80	84,0749	3,75	1,29	389
L16	120	80	14	11	61*	58	61,9060	4,92	1,49	57
L17	51	38	11	3	57*	56	58,1986	1,75	2,10	125
L18	120	83	17	6	97*	94	97,6525	3,09	0,67	1733
L19	131	86	16	7	100*	96	100,4329	4,00	0,43	2375
L20	98	93	17	7	75*	73	75,9503	2,67	1,27	591
L21	99	88	12	5	144	136	145,6033	5,56	1,11	1136
L22	99	75	13	5	113	110	114,3892	2,65	1,23	328
L23	97	95	9	7	145	140	146,6249	3,45	1,12	685
L24	98	98	10	7	136	135	137,5787	0,74	1,16	536
L25	98	88	10	7	122	116	123,5109	4,92	1,24	297
L26	97	96	11	6	140	136	141,6190	2,86	1,16	873
L27	96	87	8	7	148	144	149,5781	2,70	1,07	513
L28	99	70	15	4	114	110	115,8749	3,51	1,64	334
L29	91	70	12	5	105	103	106,3093	1,90	1,25	199
L30	93	84	11	6	117	112	118,6137	4,27	1,38	406

### 4. Resultados computacionais

A Tabela 1 apresenta os resultados computacionais para 30 instâncias. As instâncias L1-L10 foram propostas por Letchford e Amaral (2001) e são consideradas difíceis para uma relaxação lagrangeana. As instâncias L11-L20 foram selecionadas, aleatoriamente, da COVER II (Dowland, 1987b); e as instâncias L21-L30, selecionadas também aleatoriamente porém da COVER III (Alvarez-Valdez et al, 2004), entre todas as que não apresentam soluções ótimas conhecidas. Os números de *clusters* utilizados foram 2, 5 e 15 para L1-L10, L11-20 e L21-L30, respectivamente. A máquina utilizada foi um Pentium IV com 512 MB de memória RAM. As colunas GAP LB e GAP UB referem-se, respectivamente, aos *Gaps* percentuais obtidos entre os limitantes inferiores e superiores em relação à solução ótima/melhor conhecida. O limitante inferior foi obtido utilizando uma heurística simples que recebe a solução relaxada fornecida pela LagClus, verifica o número de conflitos de cada

vértice, e remove o que apresenta o maior número de conflitos. Esse processo é repetido até obter uma solução para o PCPP. Em seguida, tenta-se colocar mais um vértice na solução viável encontrada.

Pode-se observar pela Tabela 1, que os resultados foram bem interessantes. Para instâncias consideradas difíceis (L1-L10) o limitante dual encontrado pela LagClus ficou bem próximo da solução ótima, e em um caso (instância L7) a LagClus foi capaz de garantir a optimalidade da solução dada pelo limitante inferior. Para as instâncias maiores, os limitantes duais encontrados também estão muito próximos da melhor solução. Para o segundo grupo de instâncias (L11-L20), a LagClus foi capaz de comprovar a optimalidade de algumas soluções ótimas em L13, L14, L16, L18, L19 e L20, fornecendo um *Gap* superior menor que uma caixa. Por outro lado, para o último grupo de instâncias (L21-L30), a LagClus não comprovou a optimalidade de nenhuma das melhores soluções conhecidas, porém ficou muito próxima.

## 5. Conclusões

O presente trabalho apresentou uma nova forma de relaxar a formulação do problema do carregamento de paletes do produtor. A partir da representação do problema através de um grafo de conflitos, pode-se particioná-lo formando *clusters*, em seguida, as restrições do PCPP que apresentam vértices em mais de *cluster* são relaxadas no sentido lagrangeano. Esse procedimento permite ao final, decompor a relaxação em vários subproblemas separáveis, facilmente resolvidos. A grande vantagem desta relaxação está no fato de que todos os subproblemas gerados apresentam características do problema original, e com isso, os limites duais encontrados são de melhor qualidade do que as relaxações convencionais. Os resultados mostrados na Tabela 1 puderam comprovar isso.

## Referências Bibliográficas

- 1) Alvarez-Valdez, R.; Parreño, F. e Tamarit, J. M. A branch-and-cut algorithm for the pallet loading problem. **Computer and Operations Research**, 2004. In press.
- 2) Beasley, J. An exact two-dimensional non guillotine cutting tree search procedure. **Operations Research**, v. 33, p. 49-64, 1985.
- 3) Bhattacharya, R.; Roy, R.; e Bhattacharya, S. An exact depth-first algorithm for the pallet loading problem. **European Journal of Operational Research**, v. 110, p. 610-625, 1998.
- 4) Dowsland, K. An exact algorithm for the pallet loading problem. **European Journal of Operational Research**, v. 31, p. 78-84, 1987a.
- 5) Dowsland, K. A combined database and algorithmic approach to the pallet loading problem. **Journal of the Operational Research Society**, v. 38, p. 341-345, 1987b.
- 6) Dyckhoff, H. A typology of cutting and packing problems. **European Journal of Operational Research**, v. 44, p. 145-159, 1990.
- 7) Held, M. and Karp, R. M. The traveling salesman problem and minimum spanning trees: part II. **Mathematical Programming**, v. 1, p. 6-25, 1971.
- 8) Herbert, A. e Dowsland, K. A family of genetic algorithm for the pallet loading problem> In: Osman, I. H. e Kelly, J. P., editors. **Metaheuristics: theory and applications**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 378-406, 1996.
- 9) Hodgson, T. A combined approach to the pallet loading problem. **IIE Transactions**, v. 14, n. 3, p. 176-182, 1982.
- 10) Letchford, A.N. e Amaral, A. Analysis of upper bounds for the pallet loading problem. **European Journal of Operational Research**, v. 3, n. 132, p. 582-593, 2001.
- 11) Lins, L.; Lins, S. e Morabito, R. An L-approach for packing  $(l,w)$ -rectangles into rectangular and L-shaped pieces. **Journal of the Operational Research Society**, v. 54, p. 777-789, 2003.
- 12) Morales, S. R. e Morabito, R. Uma heurística simples e eficaz para o resolver o problema do carregamento de paletes do produtor. **Gestão & Produção**, v. 4, n. 1, p. 52-75, 1997.
- 13) Narciso, M. G. e Lorena, L. A. N. Lagrangean/Surrogate relaxation for generalized assignment problems. **European Journal of Operational Research**, v. 144, p. 165-177, 1999.
- 14) Pureza, V. e Morabito, R. Some experiments with a simple tabu search algorithm for the manufacturer's pallet loading problem. **Computers and Operations Research**, 2005. To appear.
- 15) Ribeiro, G. M. e Lorena, L. A. N. Modelagem matemática e relaxações Lagrangeana e Lagrangeana/Surrogate para o problema da rotulação cartográfica de pontos. In: **Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO)**, 2004a.
- 16) Ribeiro, G. M. e Lorena, L. A. N. Relaxação Lagrangeana com formação de clusters aplicada a rotulação cartográfica de pontos. In: **VIII Oficina Nacional sobre Problemas de Corte e Empacotamento & Correlatos**, 2004b. Disponível em [http://www.lac.inpe.br/~lorena/glaydston/Glaydston\\_Lorena\\_Oficina.PDF](http://www.lac.inpe.br/~lorena/glaydston/Glaydston_Lorena_Oficina.PDF).
- 17) Scheithauer, G. e Terno, J. The G4-heuristic for the pallet loading problem. **Journal of the Operational Research Society**, v. 47, p. 511-522, 1996.
- 18) Young-Gun, G. e Maing-Kyu, K. A simple and effective procedure for the manufacturer's pallet loading problem. **Journal of the Operational Research Society**, v. 49, p. 819-828, 1998.
- 19) Young-Gun, G. e Maing-Kyu, K. A fast algorithm for two-dimensional pallet loading problems of large size. **European Journal of the Operational Research**, v. 134, p. 193-202, 2001.