

# A HEURÍSTICA LAGRANGEANA/SURROGATE APLICADA AO PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DE MÁXIMA COBERTURA.

Marcos A. Pereira<sup>#</sup>

Luiz A. N. Lorena<sup>\*</sup>

Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada - LAC.  
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE.  
Caixa Postal 515, São José dos Campos, 12201-970, Brazil.  
Email: {<sup>#</sup>marcos, <sup>\*</sup>lorena }@lac.inpe.br

**Resumo:** O Problema de Localização de Máxima Cobertura (PLMC) busca obter a configuração de localização de facilidades que atenda o maior número de indivíduos de uma população, considerando uma dada distância de serviço. Métodos heurísticos bem sucedidos foram desenvolvidos para a solução deste problema. Neste trabalho utilizamos o Modelo Linear Unificado (MLU) de Hillsman para transformar os coeficientes de distância de um problema de  $p$ -medianas, agregando a tais valores uma informação de demanda. Tal adaptação permite a aplicação da heurística desenvolvida para resolver o problema de  $p$ -medianas, baseada em uma relaxação lagrangeana/*surrogate*, para resolver o PLMC. Esta heurística apresentou excelentes resultados em trabalhos anteriores, produzindo soluções de boa qualidade em tempos computacionais reduzidos. A eficiência desta técnica pôde ser comprovada através dos testes computacionais realizados, considerando problemas com 100 a 900 vértices, com valores de demanda reais, obtidos de uma base de dados geográficos para a cidade de São José dos Campos, e gerados aleatoriamente.

**Palavras-chave:** Problema de  $p$ -medianas, relaxação lagrangeana/*surrogate*, Sistemas de Informações Geográficas.

**Abstract:** The Maximal Covering Location Problem (MCLP) deals with the location of facilities in order to attend the largest subset of a population within a service distance. Many successful heuristic approaches have been developed to solve this problem. In this work we use the Unified Linear Model developed by Hillsman to adapt the distance coefficients of a  $p$ -median problem to reflect the demand information of a population. This transformation permits the application of a Lagrangean/*surrogate* heuristic developed for solving  $p$ -median problems to solve the MCLP. In previous works this heuristic proved to be very affordable, providing good quality solutions in reduced computational times. Computational tests for random generated scenarios ranging from 100 to 900 vertices and GIS-referenced instances of São José dos Campos city (Brazil) were conducted, showing the effectiveness of the combined approach.

**Keywords:**  $p$ -Median problems, Lagrangean/*surrogate* relaxation, Geographic Information Systems.

## 1. INTRODUÇÃO

Problemas de localização-alocação tratam de decisões sobre a obtenção da melhor configuração (ou ótima) para a instalação de uma ou mais facilidades, visando atender a demanda de uma população (Daskin (1995), Drezner (1995)). No setor privado, o termo *facilidade* refere-se a fábricas, depósitos, antenas de telecomunicações etc. No setor público, as aplicações dividem-se em serviços públicos (escolas, bibliotecas, pontos de ônibus) e emergenciais (postos policiais, corpo de bombeiros, ambulâncias). Nos últimos anos, a análise da localização de facilidades tem-se beneficiado com a utilização de Sistemas de Informações Geográficas (SIGs).

Apesar das diferentes aplicações, os modelos de localização-alocação apresentam semelhanças em sua estrutura. Baseado nos modelos de Hakimi (1965) e ReVelle e Swain (1970), para o problema de  $p$ -medianas Hillsman (1974) desenvolveu um Modelo Linear Unificado (MLU) que pode ser adaptado para formular outros problemas de localização-alocação. O Problema de  $p$ -Medianas visa localizar  $p$  facilidades, considerando um conjunto de vértices, de forma a minimizar a soma das distâncias entre cada ponto de demanda e a facilidade mais próxima. O Problema de Localização de Máxima Cobertura busca selecionar  $p$  vértices em uma rede de forma que a maior parte de uma população seja atendida (ou coberta), dada uma distância de serviço (Church e ReVelle (1974)).

Em seu trabalho, Hillsman propõe uma alteração nos coeficientes de distância do problema de  $p$ -medianas, utilizando a informação da população de cada vértice e a distância de serviço, obtendo assim um novo conjunto de coeficientes relativos a um problema de localização de máxima cobertura. Como a estrutura do modelo de  $p$ -medianas não foi modificada, pode-se aplicar os procedimentos existentes para resolução deste e obter soluções para o problema de localização de máxima cobertura associado. Esta técnica é estudada neste trabalho, com a aplicação da heurística lagrangeana/surrogate de Senne e Lorena (2000) para resolução de problemas de  $p$ -medianas, considerando dados gerados aleatoriamente e reais.

A seção seguinte introduz o Modelo Linear Unificado e a formação dos coeficientes de um problema de localização de máxima cobertura a partir dos dados de um problema de  $p$ -medianas. A seção 3 descreve a relaxação lagrangeana/surrogate de Senne e Lorena para resolver o problema de  $p$ -medianas. A seção 4 apresenta um algoritmo para melhoria de soluções primais, baseada em substituição de vértices. Os resultados dos testes computacionais para problemas com 100 a 900 vértices, considerando dados reais ou gerados aleatoriamente, são apresentados na seção 5, onde também é apresentada a solução heurística de um problema com dados reais, utilizando um Sistema de Informações Geográficas, o *ArcView*, da Environmental Systems Research Institute Inc.,. A seção 6 contém as conclusões e possíveis extensões.

## 2. O MODELO LINEAR UNIFICADO PARA O PROBLEMA DE P-MEDIANAS E O PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DE MÁXIMA COBERTURA

Considerando uma rede com  $n$  vértices e uma matriz de distâncias simétrica  $\mathbf{D} = [d_{ij}]_{n \times n}$ , o MLU adaptado para o problema de  $p$ -medianas pode ser formulado como o seguinte problema binário de programação inteira:

$$v(pMed) = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$(pMed) \text{ s.a.} \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad \forall j \in N. \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ii} = p \quad (3)$$

$$x_{ij} \leq x_{ii}, \quad \forall i, j \in N. \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i, j \in N. \quad (5)$$

A restrição (3) é obtida assumindo  $k = p$  e a relação de igualdade na forma generalizada da correspondente desigualdade do MLU:

$$\begin{array}{l} \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ii} = k \\ \geq \end{array} \quad (6)$$

As variáveis  $x_{ij}$ ,  $i, j \in N = \{1, \dots, n\}$ , indicam se o vértice  $j$  é atendido pela facilidade localizada no vértice  $i$  ( $x_{ij} = 1$ ) ou não ( $x_{ij} = 0$ ), e se o vértice  $i$  é escolhido para a instalação de uma facilidade ( $x_{ii} = 1$ ) ou não ( $x_{ii} = 0$ ). A função objetivo (1) representa a distância total entre cada vértice de

demanda e a facilidade mais próxima. As restrições (2) e (4) especificam que cada vértice deve ser atendido por apenas uma facilidade instalada. A restrição (3) indica que exatamente  $p$  vértices devem ser escolhidos para a instalação das facilidades. A natureza binária das variáveis é dada pela restrição (5).

Uma solução ótima para o modelo (1)-(5) é uma solução que produz o menor valor para a função objetivo (1), considerando uma dada matriz de coeficientes  $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{n \times n}$ . Se  $w_j$  representa a informação da população de cada vértice  $j \in N$ , e  $S$  especifica uma distância de serviço, então um novo conjunto de coeficientes pode ser obtido utilizando a matriz de distâncias  $\mathbf{D}$  de  $p$ Med da seguinte forma:

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } d_{ij} \leq S; \\ w_j, & \text{se } d_{ij} > S. \end{cases} \quad (7)$$

Se tais coeficientes forem utilizados na equação (1), então o objetivo do problema é alterado para determinar os vértices candidatos para instalação de  $p$  facilidades de forma a minimizar a população não atendida dos vértices que estiverem a uma distância maior que  $S$  de qualquer facilidade, ou equivalentemente, maximizar a população atendida dos vértices a uma distância menor ou igual  $S$  de alguma facilidade. O modelo assim obtido, considerando as equações (1)-(5) e os coeficientes calculados como em (7), corresponde ao MLU para o problema de localização de máxima cobertura (PLMC). Se  $\mathbf{D}$  contém informações temporais, então  $S$  deve ser escolhido de forma a representar o tempo limite para se deslocar de uma facilidade a um vértice atendido.

Em ambos os problemas,  $x_{ij}$  representa a solução de localização-alocação, com  $x_{ii} = 1$  indicando os vértices escolhidos para a instalação das facilidades. Embora a restrição (2) obrigue que todo vértice seja alocado a uma única facilidade na definição de  $p$ Med,  $x_{ij} = 1$  não significa que o vértice  $j$  esteja sendo atendido pela facilidade instalada no vértice  $i$  no PLMC: apenas os vértices cuja distância a alguma facilidade for menor ou igual a  $S$  unidades de distância (ou tempo) serão considerados *cobertos*. Outra característica desta transformação é que o valor  $v(p\text{Med})$  da função objetivo utilizando os coeficientes definidos em (7) indica a parcela da população não atendida pela solução do problema: o valor da função objetivo correspondente para o PLMC é calculado como:

$$v(\text{PLMC}) = \sum_{j=1}^n w_j - v(p\text{Med}) \quad (8)$$

### 3. A RELAXAÇÃO LAGRANGEANA/SURROGATE

Para efeito de notação, seja  $P$  o modelo definido em (1)-(5) com os coeficientes da função objetivo tomados da matriz  $\mathbf{C}$ , calculados como em (7). O Problema  $P$  pode ser resolvido utilizando heurísticas baseadas em relaxação. Em Narciso e Lorena (1999) relata-se uma heurística baseada numa relaxação lagrangeana/*surrogate* para resolver de forma aproximada o problema  $P$ . Como proposta por Glover (1968), para um dado vetor de multiplicadores  $\lambda \in R_+^n$ , uma relaxação *surrogate* para  $P$  pode ser definida como:

$$v(\text{SP}^\lambda) = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (9)$$

$$(\text{SP}^\lambda) \quad \text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \lambda_j x_{ij} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \quad (10)$$

e (3) — (5).

O valor ótimo  $v(\text{SP}^\lambda)$  é menor ou igual a  $v(P)$ , e resulta da resolução do problema dual *surrogate*  $\max_{\lambda \geq 0} \{v(\text{SP}^\lambda)\}$ . O problema  $\text{SP}^\lambda$  é um problema linear inteiro sem qualquer característica que possa ser explorada. Além disso, a função *surrogate*  $s: R_+^n \rightarrow R$ ,  $(\lambda, v(\text{SP}^\lambda))$  possui algumas propriedades

que dificultam a obtenção da solução dual. Métodos para encontrar soluções aproximadas para o problema dual *surrogate* foram propostos por Karwan e Rardin (1979) e Dyer (1980).

Devido a tais dificuldades com a relaxação  $SP^\lambda$ , propõe-se relaxar novamente o problema, agora no sentido lagrangeano. Seja  $t \geq 0$  o multiplicador dual associado à restrição (10), obtendo-se assim a relaxação lagrangeana/*surrogate* de  $SP^\lambda$ :

$$v(L_t SP^\lambda) = \min \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (c_{ij} - t\lambda_j) x_{ij} + t \sum_{j=1}^n \lambda_j \quad (11)$$

$(L_t SP^\lambda)$  s.a. (3) – (5).

Para um dado  $t \geq 0$  e  $\lambda \in R_+^n$ , tem-se  $v(L_t SP^\lambda) \leq v(SP^\lambda) \leq v(P)$ . O problema  $L_t SP^\lambda$  é resolvido considerando a restrição (3) implicitamente, permitindo decompor o problema no índice  $i$ , obtendo-se  $n$  subproblemas da forma:

$$\min \sum_{j=1}^n (c_{ij} - t\lambda_j) x_{ij} \quad (12)$$

s.a. (4) e (5).

que podem ser facilmente resolvidos calculando-se:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^n [\min \{0, c_{ij} - t\lambda_j\}], \forall i \in N, \quad (13)$$

e definindo  $I$  como o conjunto dos índices dos  $p$  menores  $\beta_i$  (é aqui que a restrição (3) é considerada implicitamente). Assim, uma solução  $x_{ij}^\lambda$  para o problema  $L_t SP^\lambda$  será definida como:

$$x_{ii}^\lambda = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in I \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (14)$$

e para  $i \neq j$ :

$$x_{ij}^\lambda = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in I \text{ e } c_{ij} - t\lambda_j < 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (15)$$

O valor da função objetivo da relaxação lagrangeana/*surrogate* é dado por:

$$v(L_t SP^\lambda) = \min \sum_{i=1}^n \beta_i x_{ii} + t \sum_{j=1}^n \lambda_j \quad (16)$$

Uma característica interessante da relaxação  $L_t SP^\lambda$  é que para  $t = 1$  tem-se a relaxação lagrangeana usual, no multiplicador  $\lambda$ . Para  $\lambda$  fixo, o melhor valor para  $t$  pode ser calculado resolvendo-se o problema dual lagrangeano:

$$(D_t^\lambda) \quad v(D_t^\lambda) = \max_{t \geq 0} v(L_t SP^\lambda) \quad (17)$$

sendo  $v(SP^\lambda) \geq v(D_t^\lambda) \geq v(L_t SP^\lambda)$ .

A função lagrangeana  $l: R_+ \rightarrow R$ ,  $(t, v(L_t SP^\lambda))$ , é côncava e linear por partes (Parker e Rardin (1988)). O valor ótimo  $v(L_t SP^\lambda)$  fornece um limitante melhor que o obtido pela relaxação lagrangeana usual. Uma solução exata para  $D_t^\lambda$  pode ser obtida fazendo-se uma busca em  $t$  (Minoux (1975) e Handler e Zang (1980)). Entretanto, existe um intervalo de valores  $t_0 \preceq t \preceq t_1$  (com  $t_0 = 1$  ou  $t_1 = 1$ ) que, geralmente, também produz limitantes de boa qualidade. Logo, para obter valores de limitantes melhores que a relaxação lagrangeana usual não é necessário encontrar o valor ótimo  $t^*$ , sendo suficiente encontrar um valor  $T$  tal que  $t_0 \leq T \leq t_1$ . Senne e Lorena (2000) descreve uma heurística de busca que é utilizada para encontrar valores aproximados para o melhor valor  $T$ . Se o valor de  $T$  permanecer inalterado por um número de iterações fixo *a priori*, então este valor é mantido até o final do procedimento e a heurística de busca não é mais executada.

### 3.1 O Algoritmo de Subgradientes

O seguinte algoritmo de subgradientes é usado como base da heurística lagrangeana/*surrogate* apresentada neste trabalho. Neste algoritmo,  $I = \{i \in N \mid x_{ii} = 1\}$  é o conjunto dos vértices fixados como medianas:

Dado  $\lambda \geq 0, \lambda \neq 0$ ;

Faça  $lb = -\infty, ub = +\infty, C = \emptyset$ ;

Repita

Resolva a relaxação  $(L_rSP^\lambda)$  obtendo  $x^\lambda$  e  $v(L_rSP^\lambda)$ ;

Construa uma solução factível  $x_f$  para P e o respectivo  $v_f$ ;

Atualize  $lb = \max \{lb, v(L_rSP^\lambda)\}$ ;

Atualize  $ub = \min \{ub, v_f\}$ ;

Fixe  $x_{ii} = 1$  se  $v(L_rSP^\lambda \mid x_{ii}=0) \geq ub, i \in N - I$ ;

Atualize o conjunto  $I$ ;

Calcule  $g_j^\lambda = 1 - \sum_{i=1}^n x_{ij}^\lambda, j \in N$ ;

Atualize o tamanho do passo  $\theta$ ;

Calcule  $\lambda_j = \max \{0, \lambda_j + \theta g_j^\lambda\}, j \in N$ ;

Até (condições de parada).

O valor inicial de  $\lambda$  é dado por  $\lambda_j = \min_{i \in N} \{c_{ij}\}, j \in N$ . Os tamanhos do passo utilizados são:

$$\theta = \frac{\pi(ub - lb)}{\|g^\lambda\|^2}. \quad (18)$$

O controle do parâmetro  $\pi$  é mesmo proposto por Held and Karp (1971). Iniciando com o valor  $\pi = 2$ , este parâmetro é dividido pela metade sempre que o valor de  $ub$  não decrescer por 15 iterações consecutivas. As condições de parada utilizadas são:

a)  $\pi \leq 0.005$ ;

b)  $ub - lb < 1$ ;

c)  $\|g^\lambda\|^2 = 0$

d) todas as medianas foram fixadas.

As soluções  $x^\lambda$  não são necessariamente factíveis para P, mas soluções factíveis podem ser construídas a cada iteração, atribuindo-se vértices de demanda à mediana mais próxima em  $I$ . O valor da função objetivo de uma solução factível  $x_f$  assim obtida é calculada como:

$$v_f = \sum_{j=1}^n [\min_{i \in I} \{c_{ij}\}] \quad (19)$$

## 4. MELHORIA DE SOLUÇÕES PRIMAIS

As soluções primais são calculadas sempre que o valor de  $lb$  diminui. O conjunto  $I$  é atualizado, armazenando os índices dos vértices escolhidos como novas medianas, permitindo definir exatamente  $p$  clusters, correspondendo às  $p$  medianas e seus respectivos vértices de demanda. Reduções no valor da função objetivo correspondente a uma solução primal  $x_f$  podem ser conseguidas substituindo-se uma mediana por um vértice do mesmo cluster.

Como pode-se ver pela Figura 1, esta alteração na localização das medianas do  $p$ Med pode modificar a configuração de cobertura dos vértices do PLMC, logo é necessário recalcular o atendimento dos vértices após a troca.

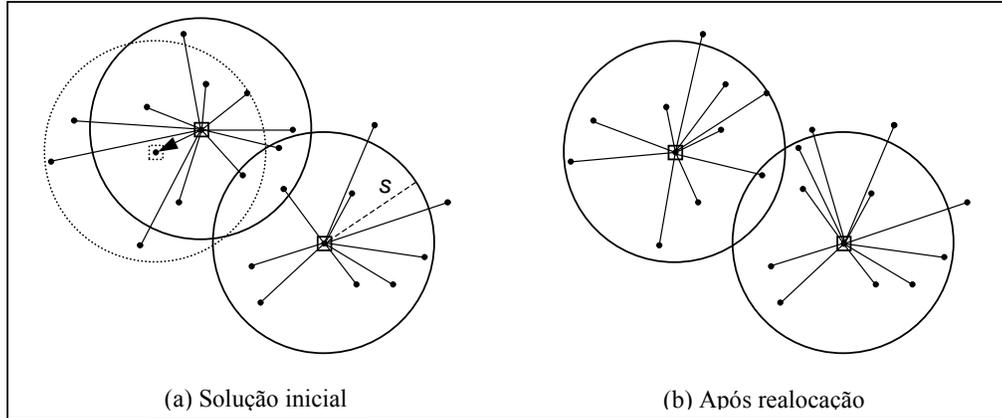


Figura 1: Realocação de vértices de clusters sobrepostos.

#### 4.1. Algoritmo de Melhoria da Solução Primal

```

Enquanto ( $v_f$  diminui)
  Para  $k = 1, \dots, p$ ;
    Troque vértices mediana e não-mediana do  $cluster C^k$ ;
    Calcule o valor  $v$  correspondente à melhor realocação;
    Se  $v < v_f$ 
      Atualize a mediana do  $cluster C^k$ ;
      Faça  $v_f = v$ ;
    Fim Se;
  Fim Para;
Fim Enquanto;
  
```

A troca entre vértices mediana e não-mediana em cada  $cluster C^k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , pode ser executada para:

- todos os vértices não mediana do  $cluster C^k$ , ou;
- apenas para os vértices não-mediana cobertos do  $cluster C^k$ , ou;
- apenas para os vértices não-mediana localizados a uma distância (ou tempo)  $R < S$  do vértice mediana do  $cluster C^k$ .

## 5. TESTES COMPUTACIONAIS

A heurística lagrangeana/*surrogate*, com coeficientes da função objetivo adaptados para o PLMC, foi testada com dados reais e gerados aleatoriamente. Nos problemas com dados aleatórios foram utilizadas as matrizes de distâncias das redes com 100 e 150 vértices de Galvão e ReVelle (1996) e Galvão *et al.* (2000), e das instâncias pmed32.txt e pmed39.txt (com 700 e 900 vértices, respectivamente) de Beasley (1990). O número de facilidades  $p$  e a distância de serviço  $S$  foram considerados como em Galvão e ReVelle (1996) e Galvão *et al.* (2000). As demandas associadas a cada vértice foram geradas da mesma forma que a relatada nesses trabalhos: segundo uma distribuição

uniforme no intervalo [20 ,30] para as redes com 100 vértices, e segundo uma distribuição normal com media 80 e desvio padrão 15 para as redes com 150, 700 e 900 vértices.

Os dados reais consideraram redes com 324, 402, 500, 708 e 818 vértices e foram obtidos de uma base de dados geográficos relativa à cidade de São José dos Campos – SP. Os vértices representam quadras de alguns bairros centrais e o número de imóveis em cada quadra foi utilizado como valor de demanda. Nestes problemas foi simulada a instalação de antenas com alcances de 800, 1200 e 1600 m. de um provedor de serviços de Internet via rádio (os dados destes problemas estão disponíveis em <http://www.lac.inpe.br/~lorena/instancias.html>). Um sumário dos problemas de teste está apresentado na Tabela 1.

Problema	Valores de $n$	Valores de $p$	Valores de $S$	Fonte
G&R100	100	[8, 10, 12]	[50, 65, 80]	Galvão e ReVelle (1996)
G&R150	150	[8, 10, 12]	[75, 80, 85, 90]	Galvão e ReVelle (1996)
G150	150	[5, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20]	[70, 80, 90, 95]	Galvão et al. (2000)
SJC324	324	[1, 2, 3, 4, 5]	[800, 1200, 1600]	dmatrix324.txt
SJC402	402	[1, 2, 3, 4, 5, 6]	[800, 1200, 1600]	dmatrix402.txt
SJC500	500	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]	[800, 1200, 1600]	dmatrix500.txt
SJC708	708	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]	[800, 1200, 1600]	dmatrix708.txt
SJC818	818	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]	[800, 1200, 1600]	dmatrix818.txt
B700	700	[20, 24, 28]	[13, 15, 20]	pmed32.txt
B900	900	[20, 24, 28]	[10, 13, 16]	pmed39.txt

Tabela 1: Sumário dos problemas de teste.

A heurística lagrangeana/*surrogate* foi implementada em C e executada em um microcomputador equipado com um processador Intel Pentium III 733 MHz e 128 MB de RAM. Foi desenvolvido um programa para gerar os valores de demanda para os problemas G&R100, G&R150, G150, B700 e B900 e calcular os coeficientes da função objetivo de acordo com (7). Para cada combinação de valores ( $n$ ,  $p$ ,  $S$ ) foram geradas 20 instâncias considerando valores de demanda gerados aleatoriamente.

As Tabelas 2, 3, 4 e 5 contêm os resultados dos problemas considerando valores de demanda gerados de forma aleatória. As colunas “Popul.,” “Cobertura Heur.” “Iterações” e “Tempo Heur.” informam os valores médios obtidos para as 20 instâncias de cada problema. Os tempos obtidos não consideram as operações de entrada e saída e de manipulação dos dados. As colunas “Cobertura Ref.” e “Tempo Ref.” informam os melhores valores de cobertura relatados em Galvão e ReVelle (1996) e Galvão *et al.* (2000) e o respectivo tempo da solução. Em destaque estão os valores de cobertura das instâncias em que a heurística lagrangeana/*surrogate* obteve os melhores resultados.

Os valores de cobertura obtidos pela heurística lagrangeana/*surrogate* são semelhantes aos relatados em Galvão e ReVelle (1996) e Galvão *et al.* (2000). Visando reduzir os tempos computacionais dos problemas com 700 e 900 vértices, o algoritmo de melhoria de soluções primais buscava novas medianas apenas dentre os vértices localizados a  $R = 0.7*S$  unidades de distância da correspondente facilidade. Com isso, os valores de cobertura não foram muito afetados e obteve-se reduções de até 80% nos tempos computacionais para os problemas com 900 vértices.

O comportamento da heurística lagrangeana/*surrogate* é parcialmente ilustrado na Figura 2. A seqüência de pontos da metade superior do gráfico corresponde aos valores das soluções primais, calculadas somente quando houver melhora nos valores das soluções duais, representadas pela curva ascendente na porção inferior do gráfico. Cada solução primal obtida é submetida ao algoritmo de melhoria para obter menores valores para  $v(pMed)$ , resultando nas soluções representadas pelo conjunto de pontos imediatamente acima da linha horizontal que indica o valor da solução ótima para esta instância com  $n = 150$ ,  $p = 7$  e  $S = 95$ .

n	p	S	Popul.	Cobertura (%)			Iterações	Tempo (s)		
				Ref.	Heur.	Máx.		Ref.	Heur.	Máx.
100	8	50	2489	69.43	69.19	<b>70.49</b>	328	51.69	0.84	0.94
100	10	50	2499	76.23	76.00	<b>76.94</b>	309	62.90	1.01	1.15
100	12	50	2505	81.61	81.42	<b>82.27</b>	314	64.26	1.22	1.37
100	8	65	2485	87.36	87.09	<b>87.89</b>	321	53.81	0.90	1.04
100	10	65	2506	94.33	<b>94.77</b>	<b>95.57</b>	263	20.40	1.05	1.16
100	12	65	2507	99.18	<b>99.57</b>	<b>100.00</b>	252	22.03	2.02	3.13
100	8	80	2496	88.46	<b>88.57</b>	<b>88.92</b>	292	43.56	0.87	1.10
100	10	80	2494	96.21	95.84	<b>96.41</b>	277	20.54	1.18	1.37
100	12	80	2506	100.00	99.76	<b>100.00</b>	259	7.41	2.00	3.30

Tabela 2: Resultados para G&R100.

n	p	S	Popul.	Cobertura (%)			Iterações	Tempo (s)		
				Ref.	Heur.	Máx.		Ref.	Heur.	Máx.
150	10	70	11860	68.86	<b>69.37</b>	<b>70.74</b>	446	9.00 <sup>§</sup>	2.99	3.35
150	12	70	11949	77.09	<b>77.91</b>	<b>78.69</b>	433	11.00 <sup>§</sup>	3.69	4.01
150	14	70	11863	83.34	<b>83.97</b>	<b>84.66</b>	399	12.00 <sup>§</sup>	3.60	4.23
150	16	70	11957	87.75	<b>88.46</b>	<b>89.35</b>	367	13.00 <sup>§</sup>	3.75	4.40
150	18	70	11910	92.39	92.13	<b>92.92</b>	350	12.00 <sup>§</sup>	3.84	4.34
150	20	70	11912	93.95	<b>95.22</b>	<b>96.28</b>	289	6.00 <sup>§</sup>	4.36	5.11
150	8	75	11914	59.14	<b>59.63</b>	<b>60.46</b>	437	109.71 <sup>¶</sup>	2.05	2.36
150	10	75	11909	68.86	<b>69.37</b>	<b>70.44</b>	454	122.35 <sup>¶</sup>	2.97	3.24
150	12	75	11977	77.34	<b>77.53</b>	<b>78.48</b>	432	127.28 <sup>¶</sup>	3.54	3.96
150	8	80	11874	61.49	<b>62.36</b>	<b>63.63</b>	430	4.00 <sup>§</sup>	2.14	2.69
150	10	80	11879	70.91	71.67	<b>72.99</b>	454	6.00 <sup>§</sup>	3.09	3.57
150	12	80	11914	78.14	<b>78.87</b>	<b>80.10</b>	418	10.00 <sup>§</sup>	3.46	4.06
150	14	80	11874	84.47	<b>84.88</b>	<b>84.64</b>	383	12.00 <sup>§</sup>	3.55	4.23
150	8	85	11884	73.94	<b>74.49</b>	<b>74.64</b>	425	96.39 <sup>¶</sup>	3.05	3.35
150	10	85	11982	81.56	<b>82.03</b>	<b>83.04</b>	458	127.59 <sup>¶</sup>	3.88	4.40
150	12	85	11846	87.95	<b>88.51</b>	<b>89.09</b>	428	154.12 <sup>¶</sup>	4.11	4.56
150	6	90	11907	82.47	81.69	<b>82.88</b>	439	4.00 <sup>§</sup>	2.75	3.30
150	8	90	11950	89.79	89.51	<b>90.30</b>	427	8.00 <sup>§</sup>	3.73	5.05
150	10	90	11869	94.04	<b>94.55</b>	<b>95.07</b>	402	7.00 <sup>§</sup>	4.14	4.78
150	12	90	11886	96.93	<b>97.87</b>	<b>98.27</b>	351	5.00 <sup>§</sup>	4.71	5.22
150	14	90	11962	99.03	<b>99.98</b>	<b>100.00</b>	547	5.00 <sup>§</sup>	10.66	12.52
150	5	95	11935	87.23	<b>87.83</b>	<b>88.95</b>	396	4.00 <sup>§</sup>	2.15	2.37
150	7	95	11956	93.94	<b>94.45</b>	<b>94.85</b>	454	8.00 <sup>§</sup>	3.88	4.23

Tabela 3: Resultados para G&R150 (<sup>¶</sup>) e G150 (<sup>§</sup>).

n	p	S	Popul.	Cobertura (%)			Iterações	Tempo (s)		
				Ref.	Heur.	Máx.		Ref.	Heur.	Máx.
700	20	13	55545	70.03	<b>70.05</b>	<b>70.77</b>	963	329.00	135.69	149.23
700	24	13	55722	74.44	74.10	<b>74.86</b>	676	399.00	164.01	187.90
700	28	13	55483	78.05	77.56	<b>78.46</b>	668	536.00	198.17	220.86
700	20	15	55662	79.56	<b>79.69</b>	<b>80.18</b>	701	592.00	163.98	181.75
700	24	15	55650	83.17	83.06	<b>83.43</b>	717	662.00	199.51	223.33
700	28	15	55778	86.18	85.83	<b>86.21</b>	699	841.00	235.14	272.27
700	20	20	55495	95.76	<b>96.19</b>	<b>96.45</b>	1234	1281.00	547.08	652.02
700	24	20	55630	97.01	<b>97.39</b>	<b>97.57</b>	1105	1641.00	630.82	759.79
700	28	20	55640	98.02	<b>98.26</b>	<b>98.51</b>	1046	2076.00	737.77	909.94

Tabela 4: Resultados para B700.

$n$	$p$	$S$	Popul.	Cobertura (%)			Iterações	Tempo (s)		
				Ref.	Heur.	Máx.		Ref.	Heur.	Máx.
900	20	10	71464	67.72	67.08	67.70	707	763.00	186.20	214.53
900	24	10	71559	71.58	70.78	71.44	725	1099.00	244.17	264.19
900	28	10	71478	75.12	73.73	74.55	730	1272.00	298.30	323.73
900	20	13	71345	88.03	87.55	87.88	820	1272.00	467.75	528.43
900	24	13	71555	90.48	89.75	90.19	848	1656.00	598.15	696.51
900	28	13	71481	92.30	91.58	91.95	931	1989.00	771.27	852.51
900	20	16	71556	96.73	96.64	<b>96.82</b>	1544	2725.00	1533.13	1781.15
900	24	16	71481	97.66	<b>97.76</b>	<b>97.98</b>	1408	3269.00	1873.06	2750.71
900	28	16	71616	98.43	<b>98.58</b>	<b>98.88</b>	1244	4244.00	2031.29	2575.65

Tabela 5: Resultados para B900.

Coefficientes de custo calculados como em (7) introduzem descontinuidades muito fortes nos valores de  $v(pMed)$  sempre que a mediana de um *cluster* for substituída por outro vértice do mesmo *cluster*. Devido à Edição de Hillsman, tais coeficientes assumem valores nulos ou não nulos. O cálculo dos limitantes na heurística lagrangeana/*surrogate* também é afetado e, dessa forma, o valor obtido para os respectivos *gaps* de dualidade não pode ser utilizado para avaliar a qualidade das soluções heurísticas. Além da natureza aleatória dos valores de demanda, a forma como as matrizes de distância são obtidas pode influenciar o esforço computacional necessário para resolver problemas de  $p$ -medianas (Schilling *et al.* (2000)). Pretende-se realizar mais estudos sobre estas questões.

Nas Tabelas 6, 7, 8, 9 e 10 apresenta-se os resultados obtidos para os problemas SJC324, SJC402, SJC500, SJC708 e SJC818. Nestes problemas, o número de facilidades varia de 1 até o mínimo necessário para cobrir todos os vértices.

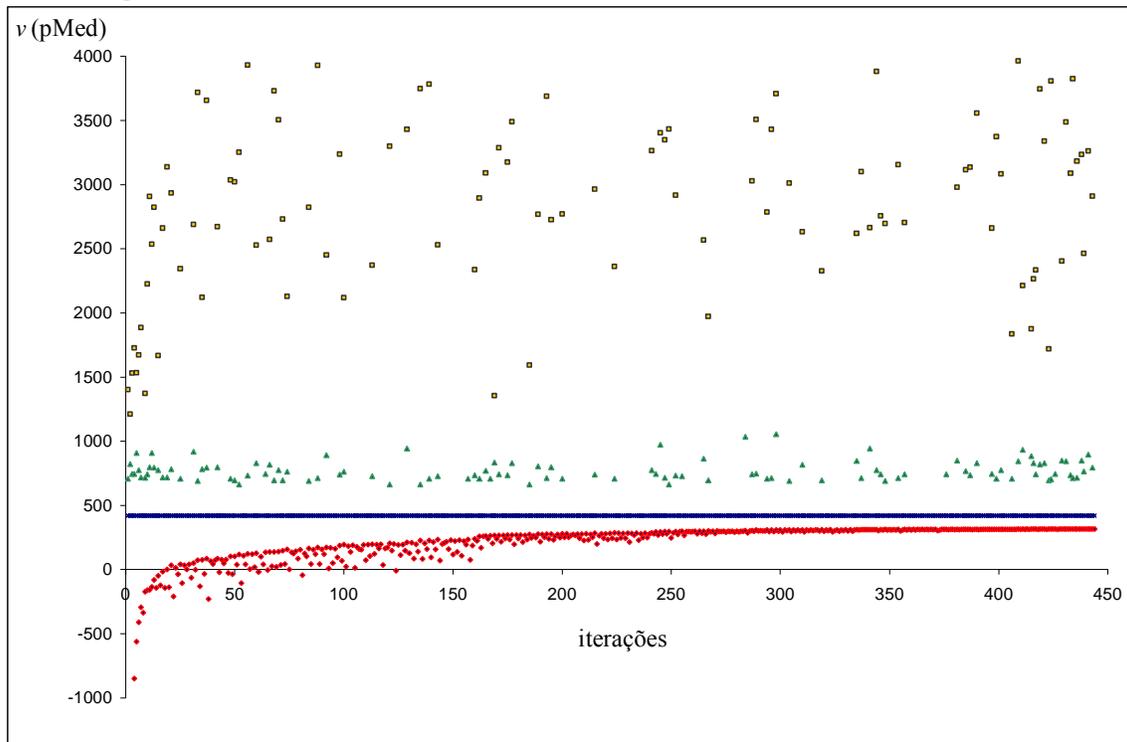


Figure 2: Convergence of the Lagrangean/surrogate heuristic.

A Figura 4 ilustra a solução heurística para o problema SJC708, simulando a instalação de 3 antenas com alcance de 800 m. Foram utilizadas funções do *ArcView* para processamento do arquivo de saída contendo a solução de localização e alocação, representadas pelos 3 pontos em destaque e as linhas, respectivamente. Os círculos representam o conjunto dos vértices cobertos por cada antena.

## 6. CONCLUSÕES

Neste trabalho utilizou-se a Edição de Hillsman para transformar os coeficientes de distância de um problema de  $p$ -medianas e valores de demanda, obtendo um problema de localização de máxima cobertura. Esta técnica permite que algoritmos desenvolvidos para resolver problemas de  $p$ -medianas sejam utilizados, com pequenas alterações (se necessário), para obter soluções para problemas de localização de máxima cobertura. Embora a qualidade das soluções fornecidas pela heurística lagrangeana/*surrogate* não possa ser avaliada diretamente, a semelhança entre os resultados obtidos e os disponíveis na literatura mostram a eficácia desta técnica. Os efeitos da descontinuidade dos valores das soluções devidos aos coeficientes de custo gerados pelo processo de edição é um assunto que merece mais estudos.

A utilização de ferramentas baseadas em Sistemas de Informações Geográficas auxiliou na avaliação desta técnica sobre dados reais. Os reduzidos tempos computacionais permitem que vários cenários sejam considerados, permitindo aos decisores dos setores público e privado a escolha daqueles que melhor atendam suas necessidades.

<i>n</i>	<i>p</i>	<i>S</i>	Popul. Atend.	Cobert. (%)	Iter.	Tempo (s)
324	1	800	5461	44.94	31	0.28
324	2	800	8790	72.33	465	5.92
324	3	800	11604	95.49	333	5.33
324	4	800	12106	99.62	493	11.92
324	5	800	12152	100.00	448	16.20
324	1	1200	9932	81.73	27	0.27
324	2	1200	11555	95.08	358	5.22
324	3	1200	12152	100.00	428	9.84
324	1	1600	12123	99.76	22	0.27
324	2	1600	12152	100.00	698	15.00

Tabela 6: Resultados para SJC324.

<i>n</i>	<i>p</i>	<i>S</i>	Popul. Atend.	Cobert. (%)	Iter.	Tempo (s)
402	1	800	6555	41.01	39	0.55
402	2	800	11339	70.94	545	10.16
402	3	800	14690	91.90	486	11.09
402	4	800	15658	97.96	493	13.73
402	5	800	15970	99.91	541	29.11
402	6	800	15984	100.00	567	38.01
402	1	1200	10607	66.36	41	0.71
402	2	1200	14832	92.79	342	7.14
402	3	1200	15984	100.00	405	13.46
402	1	1600	15438	96.58	36	0.77
402	2	1600	15984	100.00	483	11.87

Tabela 7: Resultados para SJC402.

<i>n</i>	<i>p</i>	<i>S</i>	Popul. Atend.	Cobert. (%)	Iter.	Tempo (s)
500	1	800	7944	40.31	37	0.77
500	2	800	12454	63.20	368	8.89
500	3	800	15730	79.82	561	16.42
500	4	800	17794	90.29	517	22.79
500	5	800	18859	95.70	550	39.06
500	6	800	19525	99.08	522	47.18
500	7	800	19692	99.92	710	85.58
500	8	800	19707	100.00	719	103.87
500	1	1200	10726	54.43	42	1.04
500	2	1200	18070	91.69	526	20.48
500	3	1200	19393	98.41	525	22.90
500	4	1200	19707	100.00	570	45.92
500	1	1600	14804	75.12	39	1.15
500	2	1600	19668	99.80	780	25.04
500	3	1600	19707	100.00	856	60.74

Tabela 8: Resultados para SJC500.

<i>n</i>	<i>p</i>	<i>S</i>	Popul. Atend.	Cobert. (%)	Iter.	Tempo (s)
708	1	800	8393	34.69	38	1.48
708	2	800	13306	55.00	489	22.25
708	3	800	17272	71.40	533	26.25
708	4	800	20338	84.07	570	33.84
708	5	800	21486	88.81	581	54.65
708	6	800	22504	93.02	526	66.19
708	7	800	23151	95.70	456	74.65
708	8	800	23667	97.83	572	108.81
708	9	800	24024	99.31	654	139.18
708	10	800	24163	99.88	684	165.26
708	11	800	24192	100.00	750	207.51
708	1	1200	11612	48.00	43	1.98
708	2	1200	20376	84.23	386	31.86
708	3	1200	22422	92.68	485	32.40
708	4	1200	23884	98.73	593	55.97
708	5	1200	24142	99.79	570	84.69
708	6	1200	24192	100.00	515	98.70
708	1	1600	16827	69.56	40	2.04
708	2	1600	23366	96.59	815	64.87
708	3	1600	23888	98.74	649	52.73
708	4	1600	24192	100.00	644	71.40

Tabela 9: Resultados para SJC708.

<i>n</i>	<i>p</i>	<i>S</i>	Popul. Atend.	Cobert. (%)	Iter.	Tempo (s)
818	1	800	8393	28.77	31	1.48
818	2	800	13306	45.62	461	29.16
818	3	800	17507	60.02	650	37.02
818	4	800	21428	73.46	582	43.83
818	5	800	24531	84.10	503	51.03
818	6	800	25908	88.82	502	73.87
818	7	800	26933	92.34	484	99.80
818	8	800	27783	95.25	540	129.84
818	9	800	28351	97.20	553	158.02
818	10	800	28639	98.19	575	197.79
818	11	800	29019	99.48	638	215.36
818	12	800	29103	99.78	664	283.91
818	13	800	29144	99.92	615	299.89
818	14	800	29168	100.00	704	337.02
818	1	1200	11612	39.81	32	1.71
818	2	1200	20290	69.56	578	49.16
818	3	1200	25211	86.43	446	35.21
818	4	1200	27029	92.67	488	52.95
818	5	1200	28513	97.75	569	89.97
818	6	1200	29137	99.89	526	106.61
818	7	1200	29168	100.00	531	137.31

Tabela 10: Resultados para SJC818.

$n$	$p$	$S$	Popul. Atend.	Cobert. (%)	Iter.	Tempo (s)
818	1	1600	16827	57.69	41	2.64
818	2	1600	24646	84.50	466	43.72
818	3	1600	27672	94.87	569	53.89
818	4	1600	28862	98,95	581	62.28
818	5	1600	29168	100.00	654	110.40

Tabela 10: (continuação).

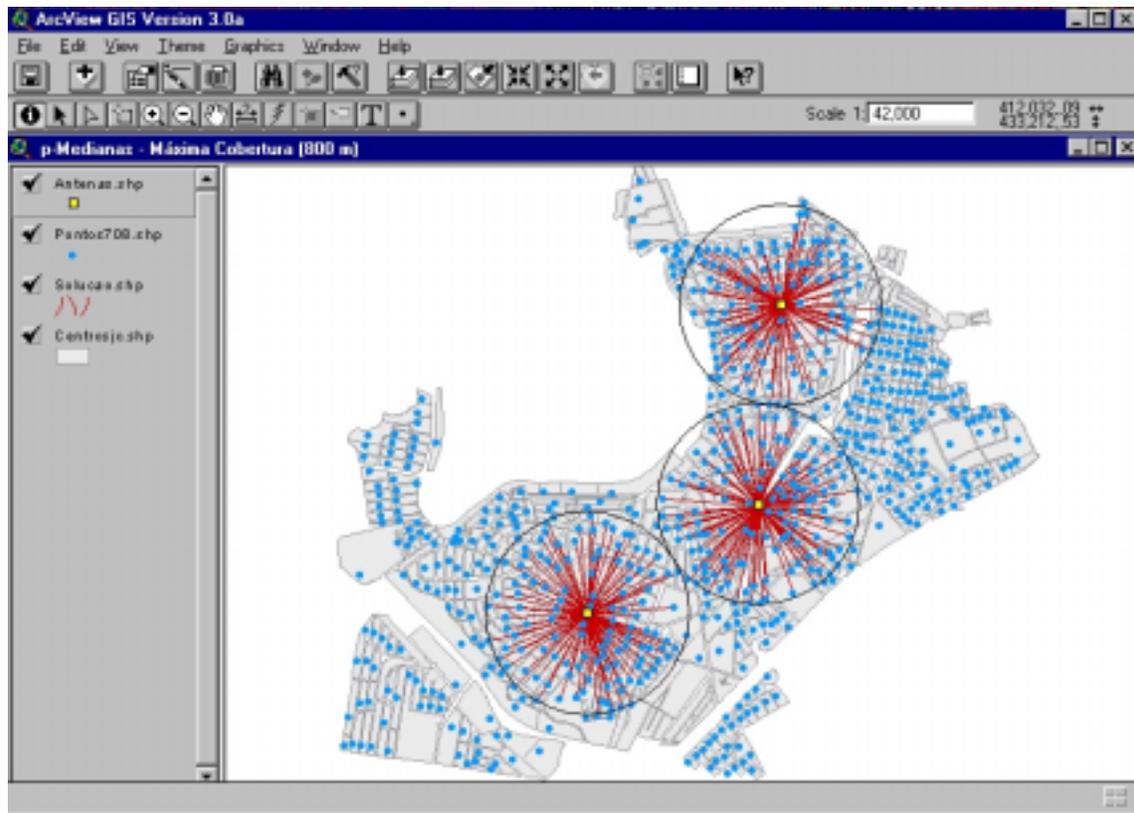


Figure 4: Localização e cobertura de antenas em São José dos Campos - SP.

**Agradecimentos:** Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP (proc. 99/06954-7) pelo suporte financeiro. O segundo autor agradece também ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq (proc. 380646/99-4).

## 7. BIBLIOGRAFIA

1. Beasley, J. E. (1990). OR-Library: Distributing Test Problems by Electronic Mail. Journal of the Operations Research Society, 41: 1069-1072.
2. Church, R. L. and ReVelle, C. S. (1974). The Maximal Covering Location Problem. Papers of The Regional Science Association, 32: 101-118.
3. Daskin, M. (1995). Network and Discrete Location: Models, Algorithms and Applications. Wiley Interscience, New York, USA.
4. Drezner, Z. (Editor) (1995). Facility Location: A Survey of Applications and Methods. Springer-Verlag, New York, USA.
5. Dyer, M. E. (1980). Calculating Surrogate Constraints. Mathematical Programming, 19: 255-278.
6. Galvão, R. D. and ReVelle, C. S. (1996). A Lagrangean Heuristic for the Maximal Covering Location Problem. European Journal of Operational Research, 88: 114-123.
7. Galvão, R. D., Espejo, L. G. A. and Boffey, B. (2000). A Comparison of Lagrangean and Surrogate Relaxations for the Maximal Covering Location Problem. European Journal of Operational Research, 124: 377-389.
8. Glover, F. (1968). Surrogate Constraints. Operations Research, 16: 741-749.
9. Hakimi, S. L. (1965). Optimum Distribution of Switching Centers in a Communication Network and Some Related Graph Theoretic Problems. Operations Research, 13: 462-475.
10. Handler, G. and Zang, I. (1980). A Dual Algorithm for the Constrained Shortest Path Problem. Networks, 10: 293-310.
11. Hillsman, E. L. (1984). The p-Median Structure as a Unified Linear Model for Location-Allocation Analysis. Environmental and Planning A, 16: 305-318.
12. Held, M. and Karp, R. M. (1971). The Traveling Salesman Problem and Minimum Spanning Trees: Part II. Mathematical Programming, 1: 6-25.
13. Karwan, M. L. and Rardin, R. L. (1979). Some Relationships Between Lagrangean and Surrogate Duality in Integer Programming. Mathematical Programming, 17: 320-334.
14. Minoux, M. (1975). Plus Courts Chemins Avec Constraints: Algorithmes et Applications. Annals of Telecommunications, 30: 383-394.
15. Narciso, M. G. and Lorena, L. A. N. (1999). Lagrangean/Surrogate Relaxation for Generalized Assignment Problems. European Journal of Operational Research, 114: 165-177.
16. Parker, R. G. and Hardin, R. L. (1988). Discrete Optimization. Academic Press, New York, USA.
17. ReVelle, C. S. and Swain, R. W. (1970). Central Facilities Location. Geographical Analysis, 2: 30-42.
18. Schilling, D. A., Rosing, K. E. and ReVelle, C. S. (2000). Network Distance Characteristics that Affect Computational Effort in p-Median Location Problems. European Journal of Operational Research, 127: 525-536.
19. Senne, E. L. F. and Lorena, L. A. N. (2000). Lagrangean /Surrogate Heuristics for p-Median Problems. In Computing Tools for Modeling, Optimization and Simulation: Interfaces in Computer Science and Operations Research (Eds.: M. Laguna and J. L. Gonzales-Velarde). Kluwer Academic Publishers, New York, pp. 115-130.