# Uma abordagem de geração de colunas para o Problema Generalizado de Atribuição

Edson Luiz França Senne - UNESP/FEG
Luiz Antonio Nogueira Lorena - INPE/LAC
Silvely Nogueira de Almeida Salomão - UNESP/FCT

Código do Trabalho: **TR0601_1594**
Área: **Pesquisa Operacional**

**Apoio:** CNPq FAPESP Fundunesp

## O Problema Generalizado de Atribuição

Atribuir n tarefas a m agentes.

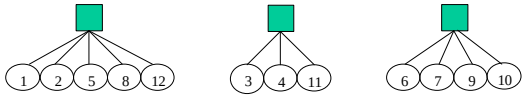
$c_{ij}$ - custo de atribuir a tarefa j para o agente i

$r_{ij}$ - quantidade de recurso requerido pela tarefa j ao agente i

$b_i$ - capacidade (recursos disponíveis) do agente i

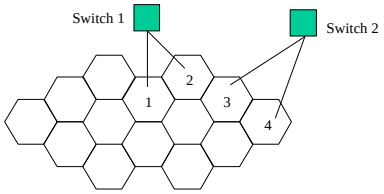
Qual é a **atribuição de custo mínimo** das n tarefas aos m agentes, de forma que cada tarefa é atribuída a apenas um agente e as capacidades dos agentes são respeitadas?

É um problema de **otimização combinatória**. Por exemplo: n = 12 e m = 3. Neste caso, existem $3^{12}$ = 531441 atribuições possíveis (entre viáveis e inviáveis). Uma possibilidade:



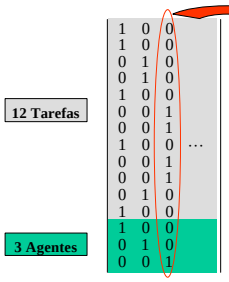

## Uma Aplicação do Problema

Atribuição de células a switches em uma rede de comunicação móvel (celular). Neste caso, além do custo $c_{ij}$, da célula j para o switch i, existe um custo (handoff) $h_{ik}$, entre células i e k atribuídas a switches diferentes.




## Um Esquema de Geração de Colunas

Considere uma matriz de elementos binários cujas colunas correspondem a padrões de atribuição viáveis das tarefas aos agentes. Por exemplo:




Esta coluna significa que as tarefas 6, 7, 9 e 10 estão atribuídas ao agente 3.

Existem muitas colunas possíveis. Mas, considerando um conjunto K de colunas, o PGA pode ser formulado como um Problema de Cobertura de Conjuntos:

Minimizar $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{k_i}\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x^i_{jk}\right)y^i_k$$

sujeito a: $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{k_i} x^i_{jk}y^i_k = 1, \quad j \in N \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{k_i} y^i_k \le 1, \quad i \in M \qquad (2)$$

onde:

- N = { 1, ..., n } e M = { 1, ..., m }
- $k_i$ é o número de colunas associadas ao agente i
- $x^i_{jk}$ = 1 se a tarefa j está atribuída ao agente i na coluna k (senão, $x^i_{jk}$ = 0)
- $y^i_k$ = 1 se a coluna k está associada ao agente i (senão, $y^i_k$ = 0)

O **problema-mestre restrito** no esquema de geração de colunas é a relaxação de Programação Linear deste problema, ou seja, $y^i_k \in [0,1]$. Resolvido o problema-mestre restrito, os custos duais finais $\pi_j$ ($j \in N$), referentes às restrições (1), e $\mu_i$ ($i \in M$), referentes às restrições (2), são usados para gerar novas colunas. As novas colunas (que devem corresponder a atribuições viáveis) são obtidas resolvendo-se m Problemas da Mochila:

Minimizar $$v(M_i) = \sum_{j=1}^{n}(c_{ij} - t\pi_j)x_{ij}$$

sujeito a: $$\sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_{ij} \le b_i$$

Com a **relaxação lagrangeana/surrogate**, $t \in [0, 1]$ e um número muito maior de colunas (em relação ao esquema tradicional, onde t = 1) pode ser considerado.

Todas as colunas tais que $v(M_i) - \mu_i < 0$ são incluídas no problema-mestre restrito e o processo se repete, até que não seja possível incluir novas colunas ao problema.

## Testes Computacionais

Testes realizados em um microcomputador Pentium III, com 1.1GHz e 512 MB de RAM.

- classe = classe de problemas
- m = número de agentes
- n = número de tarefas
- solPM = limite de Programação Linear obtido para o problema-mestre restrito
- d% = desvio percentual de solPM em relação ao valor da solução ótima
- cpu = tempo computacional (em segundos)
- S/L = relação de tempo entre a abordagem proposta e a abordagem tradicional

Tabela 1 – Problemas pequenos

| | | | S = Lagrangeana/Surrogate | | | L = Lagrangeana (Tradicional) | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| classe | m | n | solPM | d% | cpu | solPM | d% | cpu | S/L |
| A | 5 | 100 | 1968,0 | - | 125,86 | 1698,0 | - | 228,25 | 0,55 |
| | 10 | 100 | 1360,0 | - | 19,33 | 1360,0 | - | 30,21 | 0,64 |
| | 20 | 100 | 1158,0 | - | 3,47 | 1158,0 | - | 5,02 | 0,69 |
| | 5 | 200 | 3235,0 | - | 7217,47 | 3235,0 | - | 10715,07 | 0,67 |
| | 10 | 200 | 2623,0 | - | 679,59 | 2623,0 | - | 1580,23 | 0,43 |
| | 20 | 200 | 2339,0 | - | 165,35 | 2339,0 | - | 307,22 | 0,54 |
| B | 5 | 100 | 1838,8 | 0,226 | 59,45 | 1838,8 | 0,226 | 192,69 | 0,31 |
| | 10 | 100 | 1407,0 | - | 18,43 | 1407,0 | - | 19,58 | 0,94 |
| | 20 | 100 | 1166,0 | - | 3,95 | 1166,0 | - | 5,36 | 0,74 |
| | 5 | 200 | 3549,3 | 0,103 | 3524,82 | 3549,5 | 0,098 | 5549,72 | 0,64 |
| | 10 | 200 | 2825,7 | 0,187 | 398,87 | 2851,5 | 0,194 | 900,12 | 0,44 |
| | 20 | 200 | 2338,6 | 0,061 | 120,85 | 2338,5 | 0,063 | 219,68 | 0,55 |

Tabela 2 – Problemas grandes

| | | | S = Lagrangeana/Surrogate | | | L = Lagrangeana (Tradicional) | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| classe | m | n | solPM | d% | cpu | solPM | d% | cpu | S/L |
| C | 20 | 400 | 4780,2 | 0,017 | 4898,72 | 4780,2 | 0,017 | 7231,76 | 0,68 |
| | 40 | 400 | 4243,5 | 0,013 | 1506,70 | 4243,5 | 0,013 | 1944,91 | 0,76 |
| D | 20 | 400 | 24560,2 | 0,003 | 6730,81 | 24560,2 | 0,003 | 6906,88 | 0,97 |
| | 40 | 400 | 24349,5 | 0,002 | 1871,64 | 24349,5 | 0,002 | 2628,16 | 0,71 |
| E | 20 | 400 | 44875,5 | 0,001 | 9075,33 | 44875,5 | 0,001 | 7466,17 | 1,22 |
| | 40 | 400 | 44557,0 | - | 2722,58 | 44557,0 | - | 3358,14 | 0,81 |

## Conclusão

- A relaxação lagrangeana/surrogate tem sido explorada como uma alternativa computacional mais rápida do que a relaxação lagrangeana tradicional para a solução de diversos problemas de otimização combinatória, em especial para abordagens de geração de colunas.
- Como se nota pelos resultados computacionais apresentados neste trabalho, a abordagem de geração de colunas pode se beneficiar com o emprego da relaxação lagrangeana/surrogate, produzindo mais colunas para o problema-mestre restrito e obtendo bons resultados em menor tempo computacional.

## Resumo do Trabalho

A relaxação lagrangeana/surrogate tem sido explorada recentemente como método de estabilização e aceleração de abordagens de geração de colunas. Este trabalho mostra como o uso da relaxação lagrangeana/surrogate conduz para uma abordagem de geração de colunas melhor para o Problema Generalizado de Atribuição (PGA), em comparação com o método de geração de colunas tradicional. O PGA pode ser descrito como o problema de atribuir n tarefas a m agentes de forma que cada tarefa é atribuída a apenas um agente e as capacidades dos agentes são respeitadas. O trabalho apresenta testes computacionais usando problemas disponíveis na literatura para demonstrar a superioridade da abordagem proposta.

**Palavras-chave**: Relaxação lagrangeana/surrogate, Geração de colunas, Problemas de atribuição.

**Mais informações**:
elfsenne@feg.unesp.br
lorena@lac.inpe.br
silvely@prudente.unesp.br