Uma abordagem de geração de colunas para o Problema Generalizado de Atribuição

Edson Luiz França Senne (UNESP/FEG) elfsenne@feg.unesp.br
Luiz Antonio Nogueira Lorena (INPE/LAC) lorena@inpe.lac.br
Silvely Nogueira de Almeida Salomão (UNESP/FCT) silvely@prudente.unesp.br

Resumo

A relaxação lagrangeana/surrogate tem sido explorada recentemente como método de estabilização e aceleração de abordagens de geração de colunas. Este trabalho mostra como o uso da relaxação lagrangeana/surrogate conduz para uma abordagem de geração de colunas melhor para o Problema Generalizado de Atribuição (PGA), em comparação com o método de geração de colunas tradicional. O PGA pode ser descrito como o problema de atribuir n tarefas a m máquinas de forma que cada tarefa é atribuída a apenas uma máquina e as capacidades das máquinas são respeitadas. O trabalho apresenta testes computacionais usando problemas disponíveis na literatura para demonstrar a superioridade da abordagem proposta.
Palavras-chave: Relaxação lagrangeana/surrogate, Geração de colunas, Problemas de atribuição.

1. Introdução

O Problema Generalizado de Atribuição (PGA) é um problema de otimização combinatória NP-difícil (Sahni and Gonzalez, 1976). Sua importância decorre não apenas de sua aplicabilidade direta, mas também do fato de aparecer como um subproblema de muitos outros problemas práticos mais complexos. O problema pode ser estabelecido como o de determinar uma atribuição de custo mínimo de n tarefas a m máquinas de forma que cada tarefa é atribuída a apenas uma máquina cuja capacidade deve ser respeitada. Aplicações do PGA aparecem em problemas como roteamento de veículos (Fisher and Jaikumar, 1981), localização de facilidades (Ross and Soland, 1977), escalonamento de recursos (Mazolla *et al*., 1989), dentre outros. Devido a sua importância, muitos algoritmos heurísticos e exatos já foram propostos para o PGA. Dentre as diversas abordagens de algoritmos heurísticos propostos para o PGA podem ser citadas: particionamento de conjuntos (Cattrysse *et al*., 1994), busca tabu e *simulated annealing* (Osman, 1995; Laguna *et al*., 1995), relaxações lagrangeana e surrogate (Lorena and Narciso, 1996), algoritmo genético (Chu and Beasley, 1997), dentre vários outros. Métodos exatos também têm sido propostos (Savelsberg, 1997; Nauss, 2003).

Definindo M = {1, ..., m} e N = {1, ..., n} e considerando c_{ij} como o custo de atribuir a tarefa j para a máquina i, r_{ij} como a quantidade de recurso requerido para a tarefa j pela máquina i, b_i como a capacidade (recursos disponíveis) da máquina i, e a variável de decisão x_{ij} definida como:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se a tarefa } j \text{ está atribuída para a máquina } i \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

o PGA pode ser formulado como o seguinte modelo de programação linear inteiro 0-1:

(P) Minimizar $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \quad (1)$$

sujeito a: $$\sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_{ij} \le b_i, \quad \forall i \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in N \quad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in M,\ j \in N \quad (4)$$

Nessa formulação, a função-objetivo (1) corresponde ao custo total de atribuição, a restrição (2) garante que a capacidade das máquinas é respeitada, a restrição (3) garante que cada tarefa é atribuída a apenas uma máquina, e a restrição (4) impõe que as variáveis sejam binárias.

Para um dado $t \in R$, a relaxação lagrangeana/surrogate do problema (P) pode ser escrita como (Lorena and Senne, 1999):

(LSP) Minimizar $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij} - t\lambda_j)x_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j$$

sujeito a: $$\sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_{ij} \le b_i, \quad \forall i$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in M,\ j \in N$$

Para um dado $\lambda_j \in R^n$, o melhor valor para o fator t pode ser obtido resolvendo-se o problema dual $\underset{t \in R}{\text{Max}}\ v(LSP)$. O interessante a notar é que, se t = 1, esta relaxação torna-se a relaxação lagrangeana usual.

2. Esquema de Geração de Colunas para o PGA

Seja $K_i = \{x_1^i, ..., x_{k_i}^i\}$ o conjunto de padrões de atribuição viáveis para a máquina i, onde $x_k^i = \{x_{1k}^i, ..., x_{nk}^i\}$ é uma solução viável para as restrições (2) e (4). Seja $y_k^i, i \in M \text{ e } k \in K_i$, uma variável binária caracterizando se a atribuição x_k^i está associada realmente à máquina i, ou seja:

$$y_k^i = \begin{cases} 1, \text{ se a atribuição } x_k^i \text{ está associada à máquina } i \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Então, o PGA pode ser reformulado como o seguinte problema de cobertura de conjuntos:

(Q) Minimizar $\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{k_i}\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{jk}^{i}\right) y_k^i$

sujeito a: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{k_i} x_{jk}^{i} y_k^i = 1, \quad j \in N$

$\sum_{k=1}^{k_i} y_k^i \leq 1, \quad i \in M$

$y_k^i \in \{0,1\}, \quad i \in M$

O problema (PM) a ser resolvido pelo método de geração de colunas é a versão de Programação Linear deste problema de cobertura de conjuntos, ou seja:

(PM) Minimizar $\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{k_i}\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{jk}^{i}\right) y_k^i$

sujeito a: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{k_i} x_{jk}^{i} y_k^i = 1, \quad j \in N$ (5)

$\sum_{k=1}^{k_i} y_k^i \leq 1, \quad i \in M$ (6)

$y_k^i \in [0,1], \quad i \in M$

O problema (PM) é conhecido como problema-mestre restrito no contexto do processo de geração de colunas (Barnhart *et al.*, 1998). Na abordagem tradicional, após definir um conjunto inicial de colunas, o problema (PM) é resolvido e os custos duais finais π_j ($j \in N$), referentes às restrições (5), e μ_i ($i \in M$), referentes às restrições (6), são usados para gerar novas colunas. Para isto, as atribuições viáveis x_k^i para cada máquina i são obtidas resolvendo-se os seguintes m problemas da mochila:

(M_i) Minimizar $v(M_i) = \sum_{j=1}^{n}(c_{ij} - t\pi_j)x_{ij}$

sujeito a: $\sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_{ij} \leq b_i$

$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad j \in N$

Cada solução viável x_k^i corresponde a uma coluna na formulação de cobertura de conjuntos. Essa coluna consiste de n valores iguais a 1 ou 0 representando se a tarefa j está ou não atribuída à máquina i (conforme solução do problema da mochila M_i) e de um vetor unitário $\vec{e_i}$, onde i corresponde ao número da máquina.

Todas as colunas correspondentes a $v(M_i) - \mu_i < 0$ são candidatas a serem selecionadas (*multi-pricing*) e podem ser incorporadas ao problema mestre restrito. É interessante observar que como $t \in R$ e para cada valor de t tem-se um novo problema da mochila (e, conseqüentemente, uma nova coluna), com a relaxação lagrangeana/surrogate um número muito maior de colunas, em relação ao enfoque tradicional, que usa t = 1, pode ser considerado.

Assim, a combinação da relaxação lagrangena/surrogate com o método de geração de colunas para o PGA pode ser estabelecida pelo seguinte algoritmo:

1. Estabelecer um conjunto inicial de colunas para o problema mestre restrito (PM);
2. Resolver o problema (PM), obtendo os custos duais π_j $(j \in N)$ e μ_i $(i \in M)$;
3. Resolver os problemas da mochila M_i, considerando valores convenientes de t (tipicamente $t \in [0, 1]$), obtendo as potenciais colunas a serem acrescentadas ao problema mestre restrito;
4. Acrescentar ao problema (PM) todas as colunas correspondentes a $v(M_i) - \mu_i < 0$ $(i \in M)$;
5. Parar, se o passo (4) não acrescentar novas colunas ao problema (PM);
6. Executar os testes de remoção de colunas improdutivas e retornar ao passo (2).

Nos testes computacionais realizados, as colunas improdutivas foram removidas sempre que o problema mestre restrito ultrapassou 5000 colunas. A remoção consistiu em eliminar todas as colunas cujos custos reduzidos fossem maiores do que o custo reduzido médio de todas as colunas do problema.

3. Testes computacionais

A abordagem apresentada na seção anterior foi programada na linguagem C e executada em um microcomputador Pentium III com 1.1GHz e 512MB de RAM. Para a solução dos problemas da mochila utilizou-se o algoritmo de Horowitz e Sahni (Martello e Toth, 1990). Foram considerados problemas de Beasley e Yagiura, disponíveis em:

– http://mscmga.ms.ic.ac.uk/jeb/orlib/gapinfo.html (Beasley);
– http://www-or.amp.i.kyoto-u.ac.jp/members/yagiura/gap/ (Yagiura)

para os quais a solução inteira ótima é conhecida. Para efeito de comparação, os problemas foram resolvidos usando-se a relaxação lagrangeana usual (isto é, fixando-se t = 1) e usando-se a relaxação lagrangeana/surrogate (para os seguintes valores de t = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.85, 0.9, 0.93, 0.95, 0.97 e 1). Os resultados estão mostrados nas tabelas a seguir. Cada uma destas tabelas contém:

– classe – classe do problema
– m – número de máquinas;
– n – número de tarefas;
– sol – valor da solução inteira ótima do problema;
– iter – número de iterações;
– cols-a – número de colunas do problema mestre restrito final;
– cols-r – número de colunas removidas do problema mestre restrito;
– LInf – limite inferior para o valor da solução;
– LCpx – limite obtido pelo CPLEX para o problema mestre restrito;
– d% - desvio percentual do limite obtido pelo CPLEX em relação ao valor da solução inteira ótima, ou seja, d% = 100 * | (sol – LCpx) | / sol;
– o tempo computacional (em segundos).

classe	m	n	sol	iter	cols-a	cols-r	Linf	LCpx	d%	tempo
A	5	100	1698	383	3575	7767	1698,00	1698,00	0,000	125,86
	10	100	1360	68	4285	2222	1360,00	1360,00	0,000	19,33
	20	100	1158	30	5253	20	1158,00	1158,00	0,000	3,47
	5	200	3235	2827	3332	54337	3235,00	3235,00	0,000	7217,47
	10	200	2623	327	3732	15707	2622,96	2623,00	0,000	679,59
	20	200	2339	93	4418	10168	2339,00	2339,00	0,000	165,35
B	5	100	1843	176	4553	12613	1838,01	1838,84	0,226	59,45
	10	100	1407	81	4397	3975	1407,00	1407,00	0,000	18,43
	20	100	1166	27	4132	2132	1166,00	1166,00	0,000	3,95
	5	200	3553	1367	4268	100480	3549,01	3549,34	0,103	3524,82
	10	200	2831	196	4840	26111	2825,03	2825,71	0,187	398,87
	20	200	2340	95	4562	13904	2338,04	2338,57	0,061	120,85
média				**473**	**4279**	**20786**			**0,048**	**1028,12**

Tabela 1. Resultados da relaxação lagrangeana/surrogate (problemas pequenos - Beasley)

classe	m	n	sol	iter	cols-a	cols-r	Linf	LCpx	d%	tempo
A	5	100	1698	897	4959	2162	1697,04	1698,00	0,000	228,25
	10	100	1360	176	4178	0	1360,00	1360,00	0,000	30,21
	20	100	1158	54	3193	0	1158,00	1158,00	0,000	5,02
	5	200	3235	4478	4726	25216	3234,51	3235,00	0,000	10715,07
	10	200	2623	972	4028	9116	2623,00	2623,00	0,000	1580,23
	20	200	2339	214	3791	3956	2338,25	2339,00	0,000	307,22
B	5	100	1843	496	4470	4064	1838,03	1838,84	0,226	192,69
	10	100	1407	135	4074	0	1407,00	1407,00	0,000	19,58
	20	100	1166	44	3157	0	1166,00	1166,00	0,000	5,36
	5	200	3553	2314	3409	35220	3549,02	3549,53	0,098	5549,72
	10	200	2831	431	4991	7949	2825,12	2825,51	0,194	900,12
	20	200	2340	156	4819	2480	2338,10	2338,52	0,063	219,68
média				**864**	**4150**	**7514**			**0,048**	**1646,10**

Tabela 2. Resultados da relaxação lagrangeana (problemas pequenos - Beasley)

classe	m	n	sol	iter	cols-a	cols-r	LInf	LCpx	d%	tempo
C	5	100	1931	185	3361	12585	1929,06	1929,67	0,069	61,05
	10	100	1402	53	4957	4246	1399,58	1399,89	0,150	7,75
	20	100	1243	21	4081	2373	1241,50	1241,67	0,107	2,33
	5	200	3456	1456	4373	107906	3454,16	3454,56	0,042	3282,77
	10	200	2806	183	3280	25970	2803,05	2803,95	0,073	331,14
	20	200	2391	67	4835	13948	2390,05	2390,17	0,035	96,49
D	5	100	6353	192	4784	6542	6349,08	6349,93	0,048	64,80
	10	100	6349	42	4088	2231	6341,17	6341,45	0,119	10,98
	20	100	6196	18	5442	20	6176,09	6176,14	0,321	3,23
	5	200	12743	1228	3490	49561	12740,04	12740,04	0,023	4449,99
*	10	200	12433	221	4627	17475	12425,03	12425,61	0,059	495,88
*	20	200	12244	58	3607	12662	12229,11	12229,70	0,117	122,59
E	5	100	12681	191	4619	7961	12673,05	12673,05	0,063	66,88
	10	100	11577	71	3722	5447	11568,01	11568,02	0,078	12,69
	20	100	8436	25	3482	5374	8431,27	8431,52	0,053	4,76
	5	200	24930	1626	3813	70077	24926,03	24926,69	0,013	4086,47
	10	200	23307	369	3820	25744	23302,02	23302,05	0,021	646,15
	20	200	22379	93	3673	20471	22376,03	22376,79	0,010	160,75
média				**339**	**4114**	**21700**			**0,078**	**772,59**

Tabela 3. Resultados da relaxação lagrangeana/surrogate (problemas grandes - Beasley)

classe	m	n	sol	iter	cols-a	cols-r	LInf	LCpx	d%	cpu
C	5	100	1931	404	3354	3990	1929,03	1929,83	0,061	115,72
	10	100	1402	103	4067	0	1399,43	1399,86	0,153	12,28
	20	100	1243	34	3094	0	1241,20	1241,80	0,097	2,64
	5	200	3456	2432	4517	33566	3454,03	3454,49	0,044	6055,82
	10	200	2806	424	4743	8021	2803,05	2803,95	0,073	952,11
	20	200	2391	144	3771	3774	2390,09	2390,17	0,035	180,57
D	5	100	6353	301	3915	3916	6349,07	6349,92	0,048	78,43
	10	100	6349	66	4097	0	6341,39	6341,45	0,119	10,86
	20	100	6196	31	3571	0	6176,14	6176,14	0,321	3,74
	5	200	12743	1343	3719	27243	12740,02	12740,04	0,023	3495,80
	10	200	12433	284	3470	10152	12425,05	12425,73	0,058	584,47
	20	200	12244	93	4160	4154	12229,06	12229,69	0,117	156,01
E	5	100	12681	333	4294	1921	12673,05	12673,05	0,063	79,60
	10	100	11577	102	4239	0	11568,02	11568,02	0,078	15,15
	20	100	8436	39	3601	0	8431,10	8431,53	0,053	5,58
	5	200	24930	2531	4653	31003	24926,07	24926,64	0,013	5703,46
	10	200	23307	499	4380	9005	23302,05	23302,05	0,021	772,70
	20	200	22379	150	3776	4823	22376,16	22376,79	0,010	219,32
média				**517**	**3968**	**7865**			**0,077**	**1024,68**

Tabela 4. Resultados da relaxação lagrangeana (problemas grandes - Beasley)

classe	m	n	sol	iter	cols-a	cols-r	Linf	LCpx	d%	tempo
C	20	400	4781	408	4629	90997	4780,00	4780,18	0,017	4898,72
	40	400	4244	104	4298	52408	4243,10	4243,45	0,013	1506,70
D	20	400	24561	268	5077	59420	24560,03	24560,23	0,003	6730,81
	40	400	24350	84	4050	59569	24349,04	24349,50	0,002	1871,64
E	20	400	44876	489	3921	99763	44875,03	44875,48	0,001	9075,33
	40	400	44557	149	3945	82365	44556,01	44556,88	0,000	2722,58
média				**250**	**4320**	**74087**	**24560,54**	**24560,95**	**0,006**	**4467,63**

Tabela 5. Resultados da relaxação lagrangeana/surrogate (problemas grandes - Yagiura)

classe	m	n	sol	iter	Cols-a	cols-r	LInf	LCpx	d%	tempo
C	20	400	4781	602	3969	24671	4780,01	4780,19	0,017	7231,76
	40	400	4244	162	3468	11486	4243,04	4243,45	0,013	1994,91
D	20	400	24561	345	3625	26212	24560,10	24560,21	0,003	6906,88
	40	400	24350	149	4769	17795	24349,42	24349,50	0,002	2628,16
E	20	400	44876	647	3572	29223	44875,13	44875,49	0,001	7466,17
	40	400	44557	235	4948	17015	44556,38	44556,88	0,000	3358,14
média				**357**	**4059**	**21067**	**24560,68**	**24560,95**	**0,006**	**4931,00**

Tabela 6. Resultados da relaxação lagrangeana (problemas grandes - Yagiura)

As tabelas a seguir apresentam as relações de tempo de processamento para os resultados obtidos pela relaxação lagrangeana/surrogate e pela relaxação lagrangeana. Nas tabelas a seguir, a coluna S/L representa a razão entre os tempos obtidos pela relaxação lagrangeana/surrogate e os tempos obtidos pela relaxação lagrangeana para cada um dos problemas.

classe	m	n	S/L
A	5	100	0,55
	10	100	0,64
	20	100	0,69
	5	200	0,67
	10	200	0,43
	20	200	0,54
B	5	100	0,31
	10	100	0,94
	20	100	0,74
	5	200	0,64
	10	200	0,44
	20	200	0,55
média			**0,59**

Tabela 7. Relação de tempos (problemas pequenos - Beasley)

classe	m	n	S/L
C	5	100	0,53
	10	100	0,63
	20	100	0,88
	5	200	0,54
	10	200	0,35
	20	200	0,53
D	5	100	0,83
	10	100	1,01
	20	100	0,86
	5	200	1,27
	10	200	0,85
	20	200	0,79
E	5	100	0,84
	10	100	0,84
	20	100	0,85
	5	200	0,72
	10	200	0,84
	20	200	0,73
média			**0,77**

Tabela 8. Relação de tempos (problemas grandes - Beasley)

classe	m	n	S/L
C	20	400	0,68
	40	400	0,76
D	20	400	0,97
	40	400	0,71
E	20	400	1,22
	40	400	0,81
Media			**0,86**

Tabela 9. Relação de tempos (problemas grandes - Yagiura)

4. Conclusão

A relaxação lagrangeana/*surrogate* tem sido explorada como uma alternativa computacional mais rápida do que a relaxação lagrangeana tradicional para a solução de diversos problemas de otimização combinatória, em especial para abordagens de geração de colunas (Lorena and Senne, 2004).

Como se nota pelos resultados computacionais apresentados neste trabalho, a abordagem de geração de colunas pode se beneficiar com o emprego da relaxação lagrangeana/surrogate, produzindo mais colunas para o problema mestre restrito e obtendo bons resultados em menor tempo computacional.

Referências bibliográficas

Sahni, S.; Gonzalez, T. (1976) P-complete approximation problems. *J. ACM*, 23, 555-565.

Cattrysse, D.G.; Salomon, M.; Van Wassenhove, L.N. (1994). A set partitioning heuristic for the generalized assignment problem. *European J. Oper. Res*. 72 167–174.

Chu, P.C.; Beasley, J.E. (1997). A genetic algorithm for the generalized assignment problem. *Computers Oper. Res*. 24 17–23.

Osman, I.H. (1995). Heuristics for the generalized assignment problem: simulated annealing and tabu search approaches. *OR Spektrum*, 17, 211–225.

Laguna, M., Kelly, J.P.; Gonzalez-Velarde, J.L.; Glover, F. (1995). Tabu search for the multi-level generalized assignment problem. *European J. Oper. Res*. 82 176–189.

Lorena, L.A.N.; Narciso, M.G. (1996). Relaxation heuristics for a generalized assignment problem. *European J. Oper. Res*. 91 600–610.

Savelsbergh, M. (1997). A branch-and-price algorithm for the generalized assignment problem. *Oper. Res*. 45 831–841.

Nauss, R.M. (2003). Solving the generalized assignment problem: an optimizing and heuristic approach. *INFORMS Journal on Computing*, 15 (3), 249-266.

Fisher, M.; Jaikumar, R. (1981).A generalized assignment heuristic for vehicle routing. *Networks*, 11, 109-124.

Ross, G.T.; Soland, R.M. (1977).Modeling facility location problems as generalized assignment problems. *Management Sci*., 24, 345-357.

Mazzola, J.; Neebe, A.; Dunn, C. (1989).Production planning of flexible manufacturing system in material requirements planning environment. Internat. *J. Flexible Manufacturing Systems*, 1/2, 115-142.

Lorena, L.A.N.; Senne, E.L.F. (1999) Improving Traditional Subgradient Scheme for Lagrangean Relaxation: An Application to Location Problems. *International Journal on Mathematical Algorithms*, 1, 133-151.

Martello,S.; Toth, P. (1990) *Knapsack problems: algorithms and computer implementations*. New York, Wiley.

Lorena, L.A.N.; Senne, E.L.F. (2004) A Column Generation Approach to Capacitated p-Median Problems, *Computers & Operations Research,* 31 (6): 863-876, 2004.