# Introdução à Modelagem Markoviana e sua Aplicação em Ciências Espaciais

Rita de Cássia Meneses Rodrigues e Solon Venâncio de Carvalho

***Resumo***

*Processos estocásticos são usados para descrever o funcionamento de sistemas governados por mecanismos aleatórios, ou seja, sistemas cujo comportamento futuro não pode ser previsto com exatidão, somente pode ser determinada sua probabilidade de ocorrência. Neste capítulo será feita uma introdução aos fenômenos aleatórios e à teoria das probabilidades, em seguida serão descritas as Cadeias de Markov, bem como a aplicação deste processo estocástico na modelagem de sistemas espaciais.*

## 1.1. Introdução

Os sistemas**,** em geral, estão sujeitos a perturbações aleatórias que impedem predizer com precisão o seu estado em cada instante de tempo. Desta forma, uma experiência repetida, sob condições idênticas, pode não apresentar o mesmo resultado. Mas se esta experiência for repetida um grande número de vezes, aparecem regularidades que permitem a formulação de leis matemáticas, cuja base são os conceitos de probabilidade.

Processos estocásticos são usados para descrever sistemas governados por fenômenos aleatórios que evoluem de acordo com o tempo. O leque de aplicações dos processos estocásticos é muito vasto: sistemas de manutenção de máquinas (Rodrigues & Carvalho, 2001), controle de admissões em hospitais (Nunes et al., 2009), redes de satélites de comunicação (Morais Jr, 2008), etc. etc. etc.

Dentre os processos estocásticos, as cadeias de Markov merecem um lugar de destaque por sua relativa facilidade de tratamento matemático e computacional, devido à sua principal propriedade: *o comportamento probabilístico futuro do processo é condicionalmente independente do comportamento passado, dado o estado presente*. Atualmente, o Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada (LAC) do INPE dispõe de resultados teóricos e de recursos computacionais que permitem a aplicação destes processos na modelagem de sistemas do porte de sistemas reais.

## 1.2. Probabilidade

Como probabilidade é a base dos processos estocásticos, apresentam-se a seguir alguns conceitos desta teoria que serão utilizados neste capítulo.

A noção básica na teoria da probabilidade é aquela de um experimento aleatório: um procedimento que pode ser repetido qualquer número de vezes, seu resultado não pode ser determinado de antemão, mas pertence a um conjunto bem definido de possíveis resultados.

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento é chamado de *espaço amostral* ( $\Omega$ ) do experimento. Os subconjuntos de $\Omega$ são denominados *eventos*.

Probabilidade é uma função Pr(.)que associa um número a cada evento de $\Omega$ e possui as seguintes propriedades:

a) $0 \leq \Pr(A) \leq 1, \ \forall A \subseteq \Omega$;
b) $\Pr(\Omega) = 1$;
c) $\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i)$ se $A_1, A_2,...$ são eventos disjuntos.

### 1.2.1. Probabilidade Condicional e Independência

Sejam dois eventos $A$, $B \subseteq \Omega$, a probabilidade do evento $A$ ocorrer, dado que se sabe que o evento B ocorreu, é chamada probabilidade condicional do evento $A$ dado $B$, é representada por P($A$/$B$), dada por:

$$\Pr(A/B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}, se \Pr(B) > 0,$$

e tem as seguintes propriedades:

(a) $\Pr(A/B) \geq 0$ (não negatividade);

(b) $\Pr(\Omega/B) = \frac{\Pr(\Omega \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(B)}{\Pr(B)} = 1$ (normalização);

(c) para $A_1, A_2,...$ disjuntos: $\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Big/ B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i/B)$ (aditividade).

**Exemplo 1.** Seja um experimento envolvendo jogar dois dados, numerados de 1 a 6, em que se anota a face de cada dado que cair virada para cima.

O espaço amostral deste experimento pode ser representado por:

$\Omega = \{ (i, j): i = 1, ..., 6; j = 1, ..., 6\} =$

{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),

(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),

(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),

(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),

(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) }.

Seja o evento $A$ = “o resultado do primeiro dado é 6”.

= {(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}.

A probabilidade de $A$ = Pr($A$) = 6/36 = 1/6.

Seja o evento $B$ = “soma dos resultados dos dados é 9”

= {(3,6), (4,5), (5,4), (6,3).

Sabendo-se que o evento $B$ ocorreu, a probabilidade de $A$ é alterada, ou seja,

$\Pr(A/B) = \Pr(A \cap B)/P(B) = (1/36)/(4/36) = 1/4$.

Outro conceito muito importante em probabilidade é o conceito de independência de eventos. Dois eventos $A$ e $B$ são independentes se a informação da ocorrência de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, ou seja,

$$\Pr(A/B) = \Pr(A),\ \Pr(B) > 0,$$

o que equivale a:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\,\Pr(B).$$

## 1.3. Variável Aleatória

Seja $\Omega$ um espaço amostral e Pr(.) uma função de probabilidade**.**

*Definição*: Uma variável aleatória $X$ com valores em um conjunto $E$ é uma função que associa um valor $X(\omega)$ em $E$ a cada resultado $\omega \in \Omega$, ou seja, $X{:}\Omega \to E \subseteq \Re$.

**Exemplo 2.** Seja o experimento “lançamento de uma moeda”, seu espaço amostral é $\Omega$ = {cara, coroa}. Seja $X$ a variável aleatória que representa o número de caras, então $X(\omega) = 1$ se $\omega$ = cara e $X(\omega) = 0$ se $\omega$ = coroa.

Seja $X{:}\Omega \to E$ uma variável aleatória:

- se $E$ for finito ou enumerável, diz-se que $X$ é uma variável aleatória discreta;
- se $E$ for infinito e não enumerável, diz-se que $X$ é uma variável aleatória contínua.

## 1.4. Processos Estocásticos

Um processo estocástico com espaço de parâmetros $T$ é uma coleção (ou família) indexada de variáveis aleatórias $\{X_t,\ t \in T\}$ definidas no mesmo espaço amostral $\Omega$. Se $T$ é um intervalo de número reais (ex. $T = [0,\infty)$], o processo é dito ser a parâmetro (ou tempo) contínuo. Se $T$ é uma seqüência de inteiros (ex. $T = \{0,1,2,...\}$), o processo é dito ser a parâmetro (ou tempo) discreto.

Os valores que $X_t$ pode assumir como uma função de $t$ são chamados estados e juntos eles são chamados de espaço de estados $E$.

Na seção seguinte apresentam-se as cadeias de Markov que são um tipo especial de processos estocásticos, pois muitos sistemas podem ser modelados por este processo.

## 1.5. Cadeias de Markov

Seja Ω um espaço amostral e Pr(.) uma função de probabilidades nele definida.

O processo estocástico $\{X_n;\ n = 0, 1, 2,...\}$com espaço de estados discreto é uma cadeia de Markov se:

$$\Pr(X_{n+1} = j/X_0,..., X_n) = \Pr(X_{n+1} = j/X_n),\ \forall j \in E \text{ e } \forall n \in \{0,1,2,...\},$$

ou seja, $X_{n+1}$ é condicionalmente independente de $X_0,..., X_{n-1}$ dado $X_n$.

As probabilidades condicionais $\Pr(X_{n+1} = j/X_n = \mathrm{i}) = P_n(i, j)$ são chamadas probabilidades de transição em 1 passo.

Se $\Pr(X_{n+1} = j/\mathrm{X}_n = i) = \Pr(X_1 = j/X_0 = i) = P(i, j)$, para $\forall n \geq 0$, e $i, j \in E$, ou seja, as probabilidades de transição independem de $n$, as probabilidades de transição são ditas estacionárias, o que implica que elas não mudam ao longo do tempo. As cadeias de Markov que têm probabilidades de transição estacionárias são chamadas homogêneas no tempo.

As probabilidades $P(i, j)$ podem ser representadas por uma matriz denominada "matriz de transições" N X N, em que N = $|E|$ é a cardinalidade do espaço de estados $E$, cuja ij-ésima entrada é $P(i, j)$. Por exemplo, se $E = \{0, 1, 2,...,n\}$, a matriz de transições é:

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & \cdots & P(0,n) \\ P(1,0) & P(1,1) & \cdots & P(1,n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P(n,0) & P(1,n) & \cdots & P(n,n) \end{bmatrix}$$

Desta forma, a matriz de transições de uma cadeia de Markov é uma matriz quadrada com:

(a) $P(i, j). \geq 0$, $\forall$i, j $\in$ E;

(b) $\sum_{j \in E} P(i,\ j) = 1, \quad \forall i \in E$.

O item (a) ocorre porque $P(i, j)$ são probabilidades condicionais e, portanto, não podem ser negativas. O item (b) ocorre que o processo deve realizar uma transição para algum estado.

Outra maneira de se representar as cadeias de Markov é desenhando um "diagrama de transição estados", em que cada estado é representado por um pequeno círculo com seu nome dentro dele, e cada potencial transição do estado $i$ para o estado $j$ (se $P(i, j). > 0$) é representada por uma flecha direcionada com o valor de $P(i, j)$ escrito sobre a flecha. Nos diagramas de transição apresentados neste capítulo $P(i, j) = p_{ij}$.

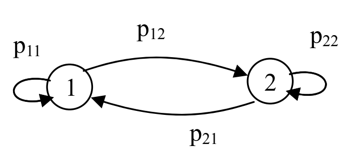


**Figura 9.1. Diagrama de transição de estados**

Neste capítulo consideram-se somente as cadeias de Markov com um número finito de estados e com probabilidades de transição estacionária.

### 1.5.1 – Outras Probabilidades de Interesse

#### 1.5.1.1. – $\Pr(X_{n+1} = k, X_{n+2} = j / X_n = i) = ?$

Usando a definição de probabilidade condicional tem-se que:

$$\Pr(A \cap B/C) = \frac{\Pr(A \cap B \cap C)}{\Pr(C)} = \frac{\Pr(A / B \cap C)\Pr(B \cap C)}{\Pr(C)} = \Pr(A/B \cap C)\Pr(B/C).$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\Pr(X_{n+1}= k, X_{n+2}= j/X_n= i) &= \Pr(X_{n+2}= j/X_n= i, X_{n+1}= k)\Pr(X_{n+1}= k /X_n = i)\\ &= \Pr(X_{n+2}= j/X_{n+1}= k)\Pr(X_{n+1}= k /X_n = i)\\ &= P(i, k)\, P(k, j).\end{aligned}$$

No caso geral:

$$\begin{aligned}\Pr(X_{n+1} = i_1, X_{n+2} = i_2,...,X_{n+m} = i_m/X_n = i_0) &= P(i_0, i_1)\, \mathrm{P}(i_1, i_2) \ldots \mathrm{P}(i_{m-1}, i_m)\\ &= \Pr(X_1 = i_1, X_2 = i_2,...,X_{\mathrm{m}} = i_m/X_0 = i_0).\end{aligned}$$

#### 1.5.1.2. – Distribuição Conjunta de $X_0,...,X_m$

A distribuição conjunta $X_0,...,X_m$, para qualquer $m \in \aleph$, pode ser completamente especificada pela expressão:

$$\Pr(X_0 = i_0, X_1 = i_1,...,X_m = i_m) = \Pr(X_0 = i_0)\, \mathrm{P}(i_0, i_1)\, \mathrm{P}(i_1, i_2) \ldots \mathrm{P}(i_{m-1}, i_m)$$

em que $\Pr(X_0 = i)$ é a distribuição inicial do estado $i \in E$.

#### 1.5.1.3. – Probabilidade Incondicional

A probabilidade de o processo estar no estado $j$ no instante $n$ (probabilidade incondicional) é dada por:

$$\Pr(X_n = j) = \sum_{i \in E} \Pr\{X_n = j \mid X_0 = i\} \Pr\{X_0 = i\}.$$

#### 1.5.1.4. – Probabilidade de Transição em $n$ Passos

Para se calcular a probabilidade de transição em $n$ passos:

$$\Pr(X_{m+n} = j/X_m = i) = \Pr(X_n = j/X_0 = i) = P^n(i, j),$$

pode-se usar as equações de Chapman-Kolmogorov:

$$P^n(i, j) = \sum_{b \in E} P^m(i,b)\, P^{(m-m)}(b, j) \text{ - para qualquer } m, n \in \{0, 1, 2,...\}.$$

As equações de Chapman-Kolmogorov: indicam que, começando do estado $i$, para o processo $X$ estar no estado $j$ depois de $n$ passos, ele deve estar em algum estado intermediário $b$ depois de $m$ passos e então ir do estado $b$ para o estado $j$ durante o $(n\text{-}m)$ passos restantes.

**Exemplo 3. O Processo de Bernoulli**

Seja $\Omega$ um espaço amostral, Pr(.) uma função de probabilidades nele definida, e $\{X_n;\ n = 1, 2,...\}$ uma sequência de variáveis aleatórias definidas em $\Omega$ e assumindo somente os valores 0 e 1.

O processo estocástico $\{X_n;\ n = 1, 2,...\}$ é chamado processo de Bernoulli com $E = \{0, 1\}$ se:

a) $X_1, X_2,...$ são independentes, e

b) $\Pr(X_n = 1) = p$, $\Pr(X_n = 0) = q = 1 - p$ para todo $n$.

Pela definição do processo de Bernoulli, tem-se que:

$$\Pr(X_{n+1} = j/X_1, X_2,...,X_n) = \Pr(X_{n+1} = j) = \Pr(X_{n+1} = j/X_n),$$

ou seja, o processo de Bernoulli é uma cadeia de Markov especial, pois o futuro do processo é independente de toda a história passada e do estado presente. Sua matriz de probabilidade de transição é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix}$$

<u>Generalizando:</u> qualquer processo em que todas as variáveis são independentes é uma Cadeia de Markov (caso particular, visto que as variáveis não dependem de nada, incluindo o momento presente).

**Exemplo 4. Clima de uma Cidade**

Em uma certa cidade nunca ocorrem dois dias ensolarados em seguida. Cada dia é classificado como ensolarado, nublado (mas sem chuva) ou chuvoso. Após um dia ensolarado, o próximo dia tem a mesma probabilidade de ser nublado ou chuvoso. Se um dia é chuvoso ou nublado, existe uma chance em dois de que o próximo dia será como o anterior, caso não seja, é igualmente provável que no próximo dia ocorrerá uma das outras duas possibilidades.

Seja o espaço de estados $E = \{0, 1, 2\}$, onde o estado 0 significa "ensolarado", o estado 1 significa "nublado" e o estado 2 significa "chuvoso".

Mais precisamente,

$$X_n = \begin{cases} 0 & \textit{se o dia n está ensolarado naquela cidade} \\ 1 & \textit{se o dia n está nublado naquela cidade} \\ 2 & \textit{se o dia n está chuvoso naquela cidade} \end{cases}$$

O processo $\{X_n,\ n = 0,1,2\}$ pode ser representado por uma cadeia de Markov, pois satisfaz a propriedade $\Pr(X_{n+1} = j/X_0,..., X_n) = \Pr(X_{n+1} = j/X_n)$. A matriz de transição de $X_n$ pode ser dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

**1.5.1. Classificação de estados**

**1.5.1.1. Acessibilidade e Comunicabilidade**

O estado $j$ é dito acessível a partir do estado $i$, ou $j$ pode ser alcançado a partir de um estado $i$ (ou, $i$ atinge $j$), denota-se $i \to j$, se existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $P^n(i, j) > 0$. Isto significa que é possível para o processo eventualmente entrar no estado $j$ quando ele começa no estado $i$.

Dois estados $i$ e $j$ se comunicam se $i$ acessa $j$ e se $j$ acessa $i$, ou seja, $i \to j$ e $j \to i$.

*Propriedade reflexiva:* Qualquer estado se comunica com ele mesmo, ou seja, $P^0(i, i) = 1$.

*Propriedade transitiva:* se $i \to j$ e $j \to k$ então $i \to k$.

**1.5.1.2. Classe de Estados**

Denomina-se classe do estado $i$ ao conjunto de todos os estados que se comunicam com $i$, também denominado conjunto fechado. Desta forma, os estados de uma cadeia de Markov podem ser subdivididos em uma ou mais classes disjuntas (que não têm elementos em comum), tais que aqueles estados que se comunicam entre si se encontram na mesma classe, e um conjunto de estados transitórios.

Se em uma cadeia de Markov existir apenas uma classe, ou seja, se todos os estados se comunicam, esta cadeia é dita irredutível. Se, ao contrário, a cadeia possuir mais de uma classe ou possuir estados transitórios, ela é denominada redutível.

**1.5.1.3. Periodicidade**

Um estado é chamado periódico de período $\delta \geq 2$ se

$$P^n(j, j) = \Pr(X_n = j / X_0 = j) > 0 \text{ somente se } n \in \{0, \delta, 2\delta, ...\}.$$

Um estado é classificado como aperiódico se $\delta = 1$.

**1.5.1.4. Transitoriedade e Recorrência**

Um estado $i \in E$ é dito transitório se existir um estado $j \in E$ $(j \neq i)$ que seja acessível do estado $i$, mas o estado $i$ não é acessível de $j$, ou seja, $i \to j$ mas $j \not\to i$ para algum $j$.

Um estado é denominado recorrente se, partindo deste estado, sua probabilidade de retorno é 1, ou seja, se $i$ é recorrente $i \to j$ e $j \to i$.

Em uma cadeia de Markov finita, nem todos os estados são transitórios.

Se todos os estados em uma cadeia são recorrentes, aperiódicos, e se comunicam entre si, a cadeia é dita ser ergódica.

*Propriedade*: se $i$ é recorrente e $i \to j$ então $j$ *é* recorrente.

#### 1.5.1.5. Absorvência

Um estado $i$ e dito absorvente se $P(i, j) = 0$, $\forall j \neq i \Rightarrow P(i, i) = 1$.

*Propriedade:* Todo estado absorvente é recorrente.

### 1.5.2. Probabilidade Limite

Frequentemente se deseja saber como estará o sistema depois de um longo tempo de funcionamento, ou seja, o comportamento da probabilidade de transição em $n$ passos, para $n$ grande, $\lim_{n\to\infty} P^n(i,j) = \lim_{n\to\infty} Pr(X_n = j / X_0 = i)$.

Se esta probabilidade for independente do estado inicial, ela converge para um número $\pi(j) >.0$ e é denominada probabilidade estacionária. Ela pode ser calculada multiplicando-se a matriz $P$ por ela mesmo até que esta não se modifique mais, ou usando o teorema a seguir.

<u>*Teorema:*</u> Seja $\{X_n; n = 0, 1, 2,...\}$ uma cadeia de Markov finita e irredutível com matriz de transição $P$. Todos os estados são recorrentes se e somente se existir uma solução para:

$$\begin{cases} \pi(j) = \sum_{i\in E} \pi(i)\, P(i,j), \quad j \in E \\ \sum_{j\in E} \pi(j) = 1 \end{cases}$$

Se existir uma solução, ela é única e $\pi(j) > 0$ $\forall j$; e se $\{X_n\}$ for <u>aperiódica</u>, $\pi(j) = \lim_{n\to\infty} P^n(i,j), \forall i \in E$.

$\pi(j)$ pode também ser interpretada como a proporção do tempo, a longo prazo, que o processo passa no estado $j$, ou a freqüência relativa de ocorrência do estado $j$ a longo prazo.

As propriedades abaixo derivam da definição de classe, estados transitórios e recorrentes.

*Propriedade*: Se $i$ e $j$ forem estados recorrentes pertencentes à classe diferentes. $P^n(i, j) = 0$, para todo $n$.

*Propriedade*: Se $j$ é um estado transitório, então $\lim_{n\to\infty} P^n(i,j) = 0$ para todo $n$ e, portanto, a probabilidade de o processo estar em um estado transitório após um grande número de transições tende a zero.

Para classificar os estados de uma Cadeia de Markov com um número finito de estados

1 – identificam-se os conjuntos fechados irredutíveis – todos os estados pertencentes a um conjunto fechado irredutível finito são recorrentes;

2 – os estados restantes, se houver, são transitórios;

3 – determina-se a periodicidade.

**Exemplo 5. Voltando ao Exemplo do Clima**

Neste exemplo, a cadeia de Markov é irredutível, ou seja, existe somente um conjunto fechado que é o conjunto de todos os seus estados $E = \{0, 1,2\}$. Todos os estados são desta cadeia são recorrentes.

No longo prazo, qual é a fração de dias ensolarados? Nublados? Chuvosos?

Para obter estas respostas, deve-se resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \pi(j) = \sum_{i \in E} \pi(i)\, P(i,j), \quad j \in E \\ \sum_{j \in E} \pi(j) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \pi(0) & \pi(1) & \pi(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi(0) & \pi(1) & \pi(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \\ \pi(0) + \pi(1) + \pi(2) = 1 \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema acima, tem-se que a fração de dias ensolarados, nublados e chuvosos são, respectivamente, $\pi(0) = 1/5$, $\pi(1) = 2/5$ e $\pi(2) = 2/5$.

**1.5.3. Tempo de Primeira Passagem**

Em muitas situações deseja-se saber o número de transições realizadas pelo processo para ir do estado $i$ ao estado $j$ pela primeira vez, período denominado tempo de primeira passagem.

Se $j = i$, o tempo de primeira passagem é o número esperado de transições até que o processo retorne ao estado inicial $i$, denominado **tempo esperado de retorno**.

<u>*Teorema:*</u> Seja $j$ um estado recorrente não-nulo aperiódico e seja $\mu_{jj}$ o tempo esperado entre dois retornos consecutivos a $j$. Tem-se que:

$$\mu_{jj} = = \frac{1}{\pi(j)} \text{ para todo } j \in E.$$

Se $j \neq i$, seja $F_k(i, j)$ a probabilidade de que, começando no estado $i$, o processo faça sua primeira visita ao estado $j$ no instante $k$, ou o tempo da primeira passagem do estado $i$ para o estado $j$ seja igual a $k$.

Se $k = 1$, $F_1(i, j) = P(i, j)$, que é a probabilidade de transição em um passo e pode ser obtida diretamente da matriz de transição da cadeia de Markov.

Se $k \geq 2$:, $F_k(i, j) = \Pr(X_1 \neq j, X_2 \neq j,..., X_{k\text{-}1} \neq j, X_k = j / X_0 = i)$

$$= \sum_{b \in E - \{j\}} P_i(X_1 = b, X_2 \neq j, ..., X_{k-1} \neq j, X_k = j)$$

$$= \sum_{b \in E - \{j\}} P_i(X_2 \neq j, ..., X_{k-1} \neq j, X_k = j / X_1 = b)\, P_i(X_1 = b)$$

$$= \sum_{b \in E-\{j\}} P_b(X_1 \neq j, ..., X_{k-2} \neq j, X_{k-1} = j)\ P_i(X_1 = b)$$

$$= \sum_{b \in E-\{j\}} F_{k-1}(b, j)\ P(i, b)$$

Logo, a probabilidade de o processo estar em $i$ e visitar $j$ algum dia é dado por:

$$F(i,j) = P(i,j) + \sum_{b \in E-\{j\}} P(i,b) F(b,j)\textbf{.}$$

$F(i, j) < 1$ implica que o processo começando no estado $i$ talvez jamais atinja o estado $j$, ou seja, o tempo esperado até a primeira passagem do estado $i$ para o estado $j$ será $\mu_{ij} = \infty$.

Se $F(i, j) = 1$,

$$\mu_{ij} = \mathrm{E}[F(i, j)] = \sum_{k=1}^{\infty} kF(i, j),$$

que pode também ser calculado usando as equações recursivas:

$$\mu_{ij} = 1 + \sum_{b \neq j} p_{ib} \mu_{bj}\ .$$

**1.5.4. Número Médio de Visitas a um Estado**

O número de visitas a um estado é dado por:

$$N_j = \sum_{n=0}^{\infty} I_{\{j\}}(X_n),$$

em que $I_{\{j\}}$ é a função indicadora definida por: $I_{\{j\}}(X_n) = \begin{cases} 1\ se X_n = j \\ 0\ se X_n \neq j \end{cases}$.

O número médio de visitas que o processo faz ao estado $j$ começando do estado $i$ é dado por:

$$R(i, j) = \mathrm{E}(N_j / X_0 = i) = \mathrm{E}(\sum_{n=0}^{\infty} I_{\{j\}}(X_n) / X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} E(I_{\{j\}}(X_n) / X_0 = i)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(X_n = j / X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(i,j)\,.$$

Em notação matricial tem-se:

$$R = \mathrm{I} + P + P^n + \ldots,$$

em que I é a matriz identidade.

Fazendo $R - RP = \mathrm{I}$, tem-se que $R(\mathrm{I} - P) = \mathrm{I}$. Como $E$ é finito, tem-se que:

$$R = (\mathrm{I} - P)^{-1}.$$

### 1. 5.5. Tempo Esperado até Absorção

O tempo esperado até absorção equivale ao número médio de visitas aos estados transitórios até que a cadeia entre em um estado recorrente, a partir daí a cadeia só visitará estados recorrentes pertencentes à mesma classe deste, nunca mais retornando a um estado transitório, e é dado por:

$$R(i,j) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(i,j) \text{ para } i, j \text{ transitórios.}$$

Analogamente à Seção 1.5.4, o tempo até absorção pode ser calculado por:

$$R = (\mathrm{I} - Q)^{-1}, \text{ em que } Q(i,j) = P(i,j) \text{ para } i, j \text{ transitórios.}$$

Como a cadeia é absorvida na primeira vez que entra em um estado absorvente, a probabilidade de absorção é a probabilidade da primeira visita a estes estados, ou seja, a probabilidade de absorção pode ser obtida resolvendo-se o seguinte sistema de equações:

$$F(i,b) = \sum_{j \in E} P(i,j)F(j,b) \text{ para todo } i \in E \text{ e } b \text{ absorvente.}$$

**Exemplo 4 – Jogo de Futebol**

João e Pedro estão jogando futebol. Quando eles começam, o placar é 0-0. Para que o jogo fique mais interessante, se eles empatam, o placar é instantaneamente zerado para 0-0. Começando de qualquer placar, a probabilidade que João faça o próximo gol é 1/3. Qual é a probabilidade de Pedro ganhar o jogo?

O espaço de estados deste sistema é definido por:

$E$ = {($x$,$y$)/ $x$ é a quantidade de gols feitos por João e $y$ a quantidade de gols feitos por Pedro} = {(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (2,0)}.

$X_{n+1}$ = (0,0) se:

- $X_n$ = (0,1), ou seja, se João fizer um gol, a partida empata e o jogo é zerado, com probabilidade Pr($X_{n+1}$ = (0,0)/$X_n$ = (0,1)) = 1/3,
- $X_n$ = (1,0), ou seja, se Pedro fizer um gol, a partida empata e o jogo é zerado, com probabilidade Pr($X_{n+1}$ = (0,0)/$X_n$ = (0,1)) = 2/3.

$X_{n+1}$ = (1,0) se:

- $X_n$ = (0,0), ou seja, se João fizer um gol com Pr($X_{n+1}$ = (1,0)/$X_n$ = (0,0)) = 1/3.

$X_{n+1}$ = (0,1) se:

- $X_n$ = (0,0), ou seja, se Pedro fizer um gol com Pr($X_{n+1}$ = (0,0)/$X_n$ = (0,0)) = 2/3.

$X_{n+1}$ = (2,0) se:

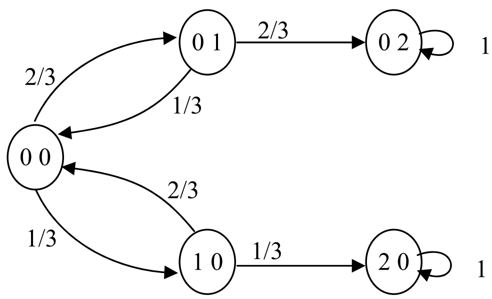
- $X_n$ = (1,0), ou seja, se João fizer um gol com Pr($X_{n+1}$ = (2,0)/$X_n$ = (1,0)) = 1/3.

$X_{n+1}$ = (0,2) se:

- $X_n$ = (0,1), ou seja, se Pedro fizer um gol com Pr($X_{n+1}$ = (0,2)/$X_n$ = (0,1)) = 123.

Logo, $X_{n+1}$ só depende do estado $X_n$, ou seja, $\Pr(X_{n+1} = j/X_0,..., X_n) = \Pr(X_{n+1} = \mathrm{j}/X_n)$, e o processo $\{X_n, n = 0,1,2\}$ pode ser representado por uma cadeia de Markov.

O diagrama de transição de $X_n$ é dada por:




E sua matriz de transição é:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O estados (0,0), (0,1) e (1,0) são transitórios e os estados (0,2) e (2,0) são recorrentes.

A probabilidade que Pedro ganhe é a probabilidade que a cadeia atinja o estado (0,2), ou seja, F((0,0), (0,2)).

Partindo do estado (0,0), a probabilidade de absorção pelo estado (0,2) pode ser obtida encontrando-se F((0,0), (0,2)).no sistema de equações:

F((0,0),(0,2)) = P((0,0),(0,1)) F((0,1),(0,2)) + P((0,0),(1,0)) F((1,0),(0,2))

$$= \frac{2}{3}F((0,1),(0,2)) + \frac{1}{3}F((1,0),(0,2))$$

F((0,1),(0,2)) = P((0,1),(0,0)) F((0,0),(0,2)) + P((0,1),(0,2)) F((0,2),(0,2))

$$= \frac{1}{3}F((0,0,(0,2)) + \frac{2}{3}F((0,2),(0,2))$$

F((1,0),(0,2)) = P((0,1),(0,0)) F((0,0),(0,2)) + P((1,0),(2,0)) F((2,0),(0,2))

$$= \frac{2}{3}F((0,0),(0,2)) + \frac{1}{3}F((2,0),(0,2))$$

F((0,2),(0,2)) = 1 (já que o estado (0,2) é absorvente

F((2,0),(0,2)) = 0 (já que o estado (2,0) é absorvente

Este sistema resulta em:

$$F((0,0),(0,2)) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}F((0,0),(0,2)) + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}F((0,0),(0,2))\right) = \frac{4}{9}F((0,0),(0,2)) + \frac{4}{9}$$

Então a probabilidade de Pedro ganhar 4/5.

## 1. 6. Aplicação de Cadeia de Markov

### 1. 6.1. Modelagem Markoviana para Otimização de Redes de Sensores sem Fio (Gomes (2009))

Gomes (2009) estudou uma rede de sensores sem fio utilizada para monitoramento ambiental, em que os nós de sensores são capazes de monitorar uma determinada área de circunferência e receber ou transmitir dados para outros dispositivos da mesma rede, no raio de alcance de sua antena de comunicação.

A rede em estudo possui um nó *sink*, responsável por agregar os dados gerados em toda a rede. Os nós de sensores podem alternar entre duas fases básicas: *Ativo* (*A*) ou *Desligado* (*D*).Na fase *A*, a antena do nó possui três modos de operação: *transmitindo*, *recebendo* e *ocioso*. Não é possível a antena transmitir e receber ao mesmo tempo. A fase *D* denota que o nó está funcionando com a quantidade mínima de equipamentos ligados, que é possível apenas quando o *buffer* do mesmo está vazio. Quando se determina que o nó entre na fase *D*, tendo unidades de dados armazenadas no *buffer*, o dispositivo não é desligado de imediato, sendo necessário antes transmitir todas as unidades de dados armazenadas, até que o *buffer* esvazie e o nó possa enfim entrar na fase *D*. O nó consome energia de acordo com o uso de seus componentes eletrônicos nas fases *A* e *D*.

Na fase *A*, com exceção do modo operacional *ocioso*, o consumo de energia é proveniente da utilização do transceptor (equipamento responsável por receber e transmitir os pacotes de dados), da unidade microcontroladora e do aparelho sensorial; no modo *ocioso*, o transceptor não é utilizado. Quando o nó está na fase *D*, o transceptor e o aparelho sensorial estão desligados. Há ainda um custo na transição do nó de sensores da fase *D* para a fase *A*, sendo o consumo de energia na transição entre *A* e *D*.

O estado do sistema pertencente a *E* é representado pela tripla *(s, b, t),* sendo *s* a fase em que o nó está em um instante de observação, ou seja,

$$s = \begin{cases} R, & \text{o } no \text{ pode transmitir ou receber, e gerar dados;} \\ N, & \text{o } nó \text{ pode apenas transmitir dados;} \\ D, & \text{o } nó \text{ não pode receber e nem transmitir dados.} \end{cases}$$

*b* é a quantidade de dados armazenados no *buffer*. *t* é a quantidade de tempo que o nó está na fase *R* ou *D,* representado por *slots* de tempo. *b* e *t* assumem valor zero quando o nó está na fase *D* e *N*, respectivamente.

Na Figura 1 é apresentada parte do diagrama de transição de estados do modelo. Nesta figura, os vértices representam os estados do sistema e as setas representam as possíveis transições entre estados. Note que nos estados representados nesta figura, omitiu-se o tempo *t*. $R_b$ e $N_b$, $b \in \{0, 1, 2,...\}$ indicam que o nó está na fase *R* e *N*, respectivamente, com *b* dados armazenados no *buffer*, e $D_0$ indica que o nó está na fase *D* com nenhum dado armazenado no *buffer*.

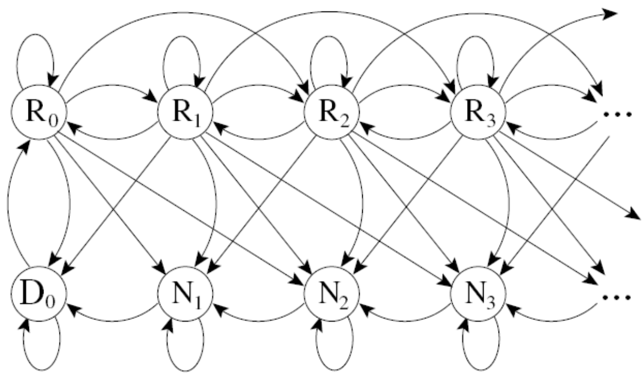



**Figura 9.2 - Diagrama de transição de estados de parte da cadeia de Markov de um nó da rede de sensores sem fio Gomes (2009)**

### 1.6.2. Modelo Markoviano com Três Estados para Atenuação de Sinal de Satélites para Receptores Móveis (Fontan et al., 1997)

A qualidade de recebimento de um sinal de satélite depende basicamente do ângulo de inclinação do satélite em relação ao receptor e do "sombreamento" do sinal durante seu percurso até o receptor.

No caso de receptores móveis, a qualidade do sinal depende também do ambiente onde o receptor se encontra. Este último fator torna-se o mais importante para análise da transmissão numa escala de tempo/espaço pequena, onde o ângulo de inclinação do satélite e o sombreamento devido às condições atmosféricas podem ser considerados constantes, importando principalmente a posição do receptor em seu ambiente (por exemplo: dentro de um túnel, sob uma árvore etc.). Neste caso, o sinal pode ser analisado por um gráfico indicando o nível de atenuação do sinal em função da distância percorrida (ao longo de uma rodovia, por exemplo). Em geral, o nível de atenuação é medido em decibéis em relação a um nível de sinal considerado bom (LOS – line-of-sight).

A Figura 9.3 mostra um exemplo de sinal medido.

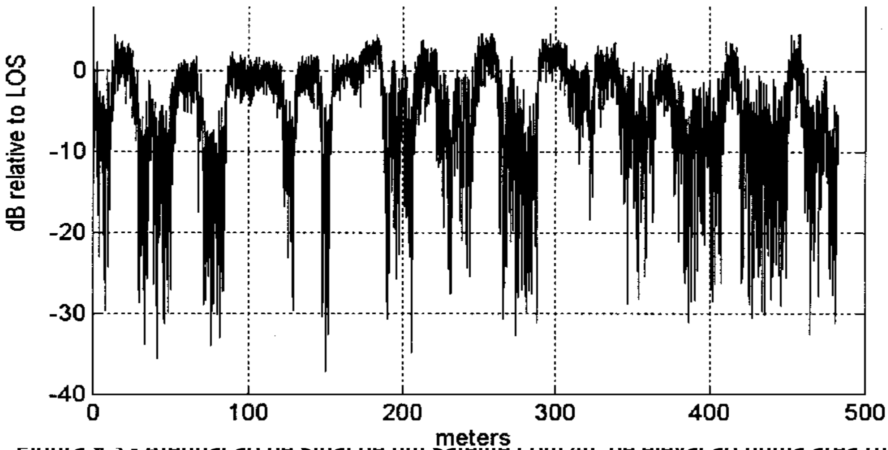


Figura 9.3 - Atenuação de sinal de um satélite com 40° de elevação numa área rural

(Fontan et al., 1997)

Para analisar este tipo de sinal propõe-se um modelo com três estados correspondendo a três níveis de atenuação:

Estado 1: Sem atenuação considerável

Estado 2: Atenuação moderada

Estado 3: Atenuação profunda

e, em cada posição, o nível de atenuação do processo é classificado em um destes estados:

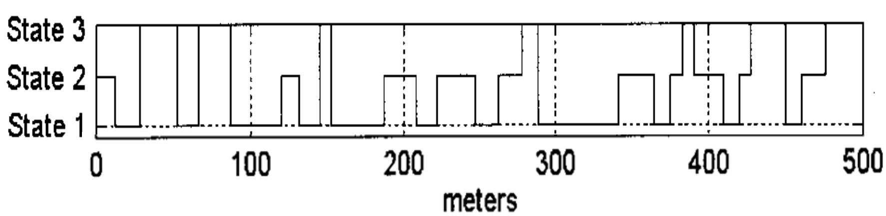


**Figura 9.4 - Modelo para a atenuação de sinal de um satélite (Fontan et al., 1997)**

Neste caso, processo acima é visto como uma sequência de transições entre estes estados obedecendo a uma cadeia de Markov:

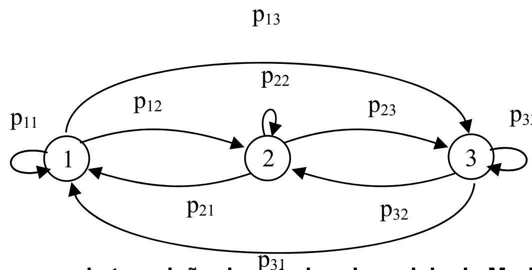



**Figura 9.5 – Diagrama de transição de estados da cadeia de Markov dos níveis de atenuação dos sinais de satélite (Fontan et al., 1997)**

A análise estatística dos dados forneceu a seguinte matriz de probabilidades para a cadeia:

$$P = \begin{bmatrix} 0,7826 & 0,1495 & 0,0679 \\ 0,2481 & 0,6899 & 0,0620 \\ 0,2404 & 0,0601 & 0,6995 \end{bmatrix}$$

calculando as probabilidades limite da cadeia obtida tem-se:

$$\pi(1) = 0,5300 \qquad \pi(2) = 0,2903 \qquad \pi(3) = 0,1797$$

que correspondem às frações do tempo que o receptor receberá um sinal sem atenuação, com atenuação moderada e com atenuação profunda, respectivamente.

## 1.7. Referências


Bertsekas, D.P.; Tsitsiklis, J.N. Introduction to Probability, Athena Scientific, 2002.

Çinlar. E. Introduction to Stochastic Processes , Prentice-Hall, 1975.

Gomes, S.P. Modelagem Markoviana para Otimizaçãio de Redes de Sensores sem Fio, São José dos Campos, 2009. (INPE-15740-TDI/1485). Dissertação (Mestrado em Computação Aplicada) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2009.

Fontan F.P., Gonzalez J.P., Ferreiro M.J.S., Castro A.V., Buonomo S., & Baptista J.P. (1997) Complex envelope three-state Markov model based simulator for the narrow-band LMS channel. International Journal on Satellite Communication 15(1): 1–15

Lieberman, H. Introdução à Pesquisa Operacional, McGraw Hill, 2006.

Moraes Junior, H. A. Modelagem markoviana de comunicação em redes de satélites. 2008. (INPE-15257-TDI/1342). Dissertação (Mestrado em Computação Aplicada) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2008.

Nunes, L. G. N., Carvalho, S. V., Rodrigues, R. C. M. . Markov decision process applied to the control of admissions into elective hospitals. Artificial Intelligence in Medicine, v. 47, p. 159-171, 2009

Rodrigues, R. C. M.; Carvalho, S. V. Um modelo markoviano de decisão para a otimização de um sistema de manutenção com tempos de reparo coxianos e fases não observáveis. Pesquisa Operacional (Impresso), Rio de Janeiro, v. 21, n. 2, p. 159-178, 2001.

Ross, S.M. Applied Probability Models with Optimization Application, Holden-Day, 1970