

INTEGRAÇÃO DE UM MODELO DE P-MEDIANAS A SISTEMAS DE INFORMAÇÕES GEOGRÁFICAS

Luiz Antonio Nogueira Lorena ^(*)
Edson Luiz França Senne ^(#)
João Argemiro de Carvalho Paiva ⁽⁺⁾
Solange Pellegrina Bueno Marcondes ^(*)

^(*) Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE/LAC
Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada
Caixa Postal 515 - 12227-010 São José dos Campos, SP

^(#) Universidade Estadual Paulista - UNESP/FEG
Faculdade de Engenharia, Departamento de Matemática
Caixa Postal 205 - 12500-000 Guaratinguetá, SP

⁽⁺⁾ Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE/DPI
Departamento de Processamento de Imagens
Caixa Postal 515 - 12227-010 São José dos Campos, SP

Resumo

O problema das p-medianas pode ser descrito como o de localizar p facilidades (medianas) em uma rede minimizando a soma de todas as distâncias de cada ponto de demanda a sua mediana mais próxima. Modelos de localização de facilidades têm sido propostos como ferramentas de auxílio a tomada de decisão, principalmente quando é possível usar Sistemas de Informações Geográficas (SIGs) na coleta e análise dos dados dos problemas. Apresentamos neste trabalho um relato da integração de um modelo de p-medianas aos SIGs ArcView, da ESRI, e SPRING, um sistema desenvolvido no INPE. O código que foi integrado a estes SIGs implementa uma abordagem recente da heurística Lagrangeana/surrogate, onde a viabilização da solução dual é feita através de uma heurística de localização-alocação alternada. O trabalho apresenta alguns testes computacionais usando dados do município de São José dos Campos, com tamanhos variando até o máximo de 3282 nós e 1141 medianas.

Palavras-chave: Localização, Sistemas de Informações Geográficas, Heurísticas Lagrangeanas.

Abstract

The p-median problem is the problem of locating p facilities (medians) on a network minimizing the sum of all distances from each demand point to its nearest facility. Facility location models have been proposed as decision making tools, mainly when geographic information systems (GIS) can be used to capture, to store and to analyze the data of the problems. In this work we present the integration of a p-median model to both ArcView, a GIS by ESRI (Environmental Systems Research Institute, Inc.), and SPRING, a GIS developed by INPE (National Institute for Space Research). The computer program that has been integrated to these geographic information systems implements a recent approach of Lagrangean/surrogate heuristic which uses a location-allocation heuristics in order to search for the primal feasibility of intermediate dual solutions. The paper presents some computational tests which have been conducted with data from São José dos Campos city, representing problems with up to 3282 nodes and 1141 medians.

Key Words: Facility Location, Geographical Information Systems, Lagrangean Heuristics.

1. Introdução

Problemas de localização tratam de decisões sobre onde localizar facilidades, considerando clientes que devem ser servidos de forma a otimizar um certo critério [Drezner, 1995], [Daskin, 1995]. O termo “facilidades” pode ser substituído por fábricas, depósitos, escolas, etc., enquanto que clientes se referem a depósitos, unidades de vendas, estudantes, etc. Em geral, as facilidades podem tanto ser selecionados como centros a serem localizados como podem também ser alocados ao subconjunto de centros abertos. Por isso, tais problemas também são conhecidos como problemas de localização-alocação, devido ao processo de alocação dos outros centros aos centros abertos.

As aplicações de problemas de localização de facilidades são, em geral, divididas para os setores público e privado. No caso de setores públicos, as aplicações procuram maximizar a satisfação dos clientes em detrimento dos custos necessários para o alcance de tal objetivo. Exemplos de aplicações em setores públicos são a localização de escolas, postos de saúde, corpo de bombeiros, ambulâncias, viaturas de polícia, pontos de ônibus, entre outros. No caso do setor privado, custos fixos estão envolvidos e suas aplicações envolvem, em geral, fábricas, depósitos, torres de transmissão, lojas de franquias, etc.

O problema das p -medianas é um problema clássico de localização de facilidades e consiste em localizar p facilidades (medianas) em uma rede de modo a minimizar a soma total das distâncias de cada nó de demanda à sua mediana mais próxima. As primeiras formulações dos problemas foram apresentadas em [Hakimi, 1964] e [Hakimi, 1965]. O problema é bem conhecido como sendo NP-completo [Garey and Johnson, 1979]. Vários métodos heurísticos e métodos que exploram uma busca em árvore têm sido desenvolvidos para o problema das p -medianas [Teitz and Bart, 1968], [Jarvinen and Rajala, 1972], [Neebe, 1978], [Christofides and Beasley, 1982]. O uso combinado de técnicas de relaxação lagrangeana e otimização por subgradientes de um ponto de vista primal-dual tem se mostrado como um bom enfoque para a solução do problema [Galvão and Raggi, 1989], [Beasley, 1993].

Modelos de localização de facilidades têm sido propostos, há algum tempo, como ferramentas de auxílio à decisão, principalmente quando uma base de dados geograficamente referenciada pode ser usada. Nestes casos, os Sistemas de Informações Geográficas (SIGs) são muito importantes na coleta e análise desses dados [Burrough, 1986]. Sistemas de Informações Geográficas [Fischbeck, 1994] integram uma sofisticada interface gráfica a uma base de dados geo-referenciados. São poderosas ferramentas de análise e planejamento espacial. Problemas complexos de localização de facilidades podem ser tratados com SIGs, levando-se em conta várias informações espaciais e, também, sócio-econômicas.

O uso de SIGs para resolver problemas de localização ainda não está totalmente difundido na comunidade científica internacional. Mas, levando-se em conta a capacidade de armazenar, exibir e manipular dados espacialmente distribuídos, a integração de algoritmos de localização aos SIGs foi iniciada há alguns anos.

Este trabalho relata a integração de um modelo de localização de p -medianas aos SIGs ArcView da ESRI (*Environmental Systems Research Institute, Inc.*) e SPRING, um sistema desenvolvido no INPE. O código integrado aos SIGs implementa uma abordagem recente da heurística lagrangeana/surrogate, onde a viabilização da solução dual é feita através de uma heurística de localização-alocação alternada. A integração com o ArcView foi feita através de um *script* escrito em *Avenue* e a integração ao SPRING foi realizada criando-se um método que atua na representação vetorial dos modelos de rede, temático e cadastral. O trabalho

apresenta alguns testes computacionais usando dados do município de São José dos Campos, com tamanhos variando até o máximo de 3282 nós e 1141 medianas.

2. O Algoritmo de p-Medianas

O problema das p-medianas considerado neste trabalho pode ser modelado como o seguinte problema de programação inteira 0-1:

$$\begin{aligned}
 v(P) &= \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \\
 (P) \quad \text{sujeito a:} \quad & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1; \quad j \in N & (1) \\
 & \sum_{i=1}^n x_{ii} = p & (2) \\
 & x_{ij} \leq x_{ii}; \quad i, j \in N & (3) \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\}; \quad i, j \in N & (4)
 \end{aligned}$$

onde:

$[d_{ij}]_{n \times n}$ é uma matriz simétrica de custo (distância), com $d_{ii} = 0, \forall i$;
 $[x_{ij}]_{n \times n}$ é a matriz de alocação, com $x_{ij} = 1$ se o nó i é alocado ao nó j , e $x_{ij} = 0$, caso contrário; $x_{ii} = 1$ se o nó i é uma mediana e $x_{ii} = 0$, caso contrário;
 p é o número de facilidades (medianas) a serem localizadas;
 n é o número de nós na rede, e $N = \{1, \dots, n\}$.

As restrições (1) e (3) garantem que cada nó j é alocado a somente um nó i , que deve ser uma mediana. A restrição (2) determina o número exato de medianas a ser localizado (p), e (4) corresponde às condições de integralidade.

A técnica heurística usada para resolver de forma aproximada o problema (P) é conhecida como relaxação lagrangeana/surrogate e já foi aplicada com sucesso a outros problemas de otimização combinatória [Lorena and Lopes, 1994], [Lorena and Narciso, 1996], [Lorena and Senne, 1996], [Senne and Lorena, 1997], [Lorena and Senne, 1999], [Narciso and Lorena, 1999], [Senne and Lorena, 1999]. Uma discussão sobre as relaxações lagrangeana e surrogate pode ser encontrada em [Parker and Rardin, 1988]. Apresenta-se a seguir a relaxação lagrangeana/surrogate utilizada neste trabalho.

Como proposto por [Glover, 1968], para um dado $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$, uma relaxação surrogate de (P) pode ser definida como:

$$\begin{aligned}
 v(SP^\lambda) &= \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \\
 (SP^\lambda) \quad \text{sujeito a:} \quad & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \lambda_j x_{ij} = \sum_{j=1}^n \lambda_j & (5)
 \end{aligned}$$

e as restrições (2), (3) e (4).

O valor ótimo de $v(\text{SP}^\lambda)$ é menor ou igual a $v(\text{P})$ e resulta do problema dual surrogate $\max_{\lambda \geq 0} v(\text{SP}^\lambda)$. As funções surrogate $s: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(\lambda, v(\text{SP}^\lambda))$ possuem algumas propriedades que tornam difícil determinar a solução dual. Soluções aproximadas para o dual surrogate têm sido propostas, como em [Karwan and Rardin, 1979] e [Dyer, 1980]. Observe que o problema (SP^λ) não pode ser resolvido facilmente pois é um problema linear inteiro sem uma estrutura especial que possa ser explorada.

Devido às dificuldades com a relaxação (SP^λ) propõe-se relaxar novamente o problema, agora no sentido lagrangeano. Para um dado $t \geq 0$, a restrição (5) pode ser relaxada, obtendo-se a relaxação lagrangeana/surrogate $(\text{L}_t\text{SP}^\lambda)$, dada por:

$$v(\text{L}_t\text{SP}^\lambda) = \min \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (d_{ij} - t\lambda_j)x_{ij} + t \sum_{j=1}^n \lambda_j$$

sujeito às restrições (2), (3) e (4).

Para um dado $t \geq 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$, $v(\text{L}_t\text{SP}^\lambda) \leq v(\text{SP}^\lambda) \leq v(\text{P})$. O problema $(\text{L}_t\text{SP}^\lambda)$ pode ser resolvido considerando-se a restrição (2) implicitamente e decompondo-se o problema para o índice i , obtendo-se os seguintes n sub-problemas:

$$\min \sum_{j=1}^n (d_{ij} - t\lambda_j)x_{ij}$$

sujeito às restrições (3) e (4). Cada sub-problema é facilmente resolvido fazendo-se:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^n \{ \min(0, d_{ij} - t\lambda_j) \}$$

e escolhendo-se I como o conjunto de índices dos p menores β_i . Assim, uma solução x_{ij}^λ para o problema $(\text{L}_t\text{SP}^\lambda)$ é dada por:

$$x_{ii}^\lambda = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in I \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e, para todo $i \neq j$:

$$x_{ij}^\lambda = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in I \text{ e } d_{ij} - t\lambda_j < 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A solução lagrangeana/surrogate é dada por:

$$v(\text{L}_t\text{SP}^\lambda) = \sum_{i=1}^n \beta_i x_{ii}^\lambda + t \sum_{j=1}^n \lambda_j$$

A característica interessante da relaxação $(\text{L}_t\text{SP}^\lambda)$ é que para $t = 1$ tem-se a relaxação lagrangeana usual usando o multiplicador λ . Para um multiplicador λ fixo, o melhor valor para t pode ser encontrado resolvendo-se o problema dual lagrangeano: $v(D_t^\lambda) = \max_{t \geq 0} v(\text{L}_t\text{SP}^\lambda)$. É imediato que $v(\text{SP}^\lambda) \geq v(D_t^\lambda) \geq v(\text{L}_t\text{SP}^\lambda)$. Além disso, é bem conhecido que a função lagrangeana $l: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, v(\text{L}_t\text{SP}^\lambda))$ é côncava e linear por partes [Parker and Rardin, 1988]. O

melhor valor da relaxação lagrangeana/surrogate fornece um limitante melhor do que o obtido pela relaxação lagrangeana usual. Uma solução exata para (D_t^λ) pode ser obtida por uma busca sobre diferentes valores de t (ver [Minoux, 1975] e [Handler and Zang, 1980]). Entretanto, em geral, existe um intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$ (com $t_0 = 1$ ou $t_1 = 1$) que também produz limitantes melhores, como pode-se ver pela Figura 1 a seguir:

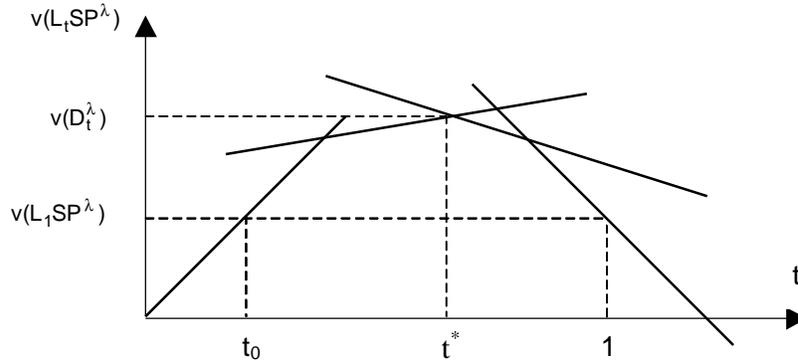


Figura 1: - Limitantes lagrangeano/surrogate.

Assim, para obter um bom limitante não é necessário encontrar o melhor valor de t (t^*), sendo suficiente encontrar um valor T tal que $t_0 \leq T \leq t_1$. Um algoritmo de busca heurística para determinar o valor de T pode ser encontrado em [Senne and Lorena, 1999].

O algoritmo de subgradientes a seguir é usado para resolver o problema das p -medianas. Neste algoritmo $C = \{ i \mid x_{ij} = 1 \}$ é o conjunto dos nós já fixados como medianas.

Dados $\lambda \geq 0$, $\lambda \neq 0$;

Fazer $lb = -\infty$, $ub = +\infty$, $C = \emptyset$;

Repetir

Resolver a relaxação $(L_T SP^\lambda)$ obtendo x^λ e $v(L_T SP^\lambda)$;

Obter uma solução viável x_f e seu valor v_f ;

Atualizar $lb = \max [lb, v(L_T SP^\lambda)]$;

Atualizar $ub = \min [ub, v_f]$;

Fixar $x_{ij} = 1$ se $v(L_T SP^\lambda \mid x_{ij} = 0) \geq ub$, $i \in N - C$;

Atualizar o conjunto C correspondentemente;

Fazer $g_j^\lambda = 1 - \sum_{i=1}^n x_{ij}^\lambda$, $j \in N$;

Atualizar o tamanho do passo θ ;

Fazer $\lambda_j = \max \{ 0, \lambda_j + \theta g_j^\lambda \}$, $j \in N$;

Até que (algum teste de parada seja satisfeito).

O valor inicial de λ usado é dado por $\lambda_j = \min_{i \in N} \{d_{ij}\}$, $j \in N$. Os tamanhos de passo são

calculados como: $\theta = \pi (ub - lb) / \|g^\lambda\|^2$. O controle do parâmetro π é o proposto por [Held and Karp, 1971]. Os testes da parada usados são os seguintes:

a) $\pi \leq 0.005$;

- b) $ub - lb < 1$;
- c) $\|g^\lambda\|^2 = 0$
- d) todas as medianas foram fixadas.

A solução x^λ não é necessariamente viável para o problema (P), mas o conjunto I identifica os nós medianas que podem ser usados para produzir soluções viáveis de (P). Os nós não-medianas são realocados às suas medianas mais próximas produzindo uma solução viável inicial x_f como:

$$x_{f\ ii}^\lambda = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in I \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e para todo $i \neq k$:

$$x_{f\ ik}^\lambda = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in I \text{ e } k = \underset{i \in I}{\text{índice de } \min\{d_{ij}\}} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

com $v_f = \sum_{j=1}^n \left(\min_{i \in I} d_{ij} \right)$.

Para melhorar a solução viável, uma heurística de localização-alocação baseada nos trabalhos de [Cooper, 1963] e [Taillard, 1996] é usada sempre que lb melhora. A heurística de localização-alocação baseia-se na observação que após a definição de x_p , exatamente p aglomerados (*clusters*) podem ser identificados, C_1, C_2, \dots, C_p , correspondendo às p medianas e suas não-medianas alocadas. A solução x_f pode ser melhorada procurando-se por uma nova mediana dentro de cada aglomerado, trocando-se a mediana atual por um nó não-mediana e recalculando-se as alocações. Caso o conjunto I se altere, recalcula-se $v_f = \sum_{j=1}^n (\min_{i \in I} d_{ij})$ e, se a nova solução for melhor, pode-se repetir o processo de realocação dentro dos novos aglomerados. Este processo se repete até que não seja mais possível obter novas melhorias.

3. Integração a Sistemas de Informações Geográficas

O algoritmo de p-medianas descrito na seção anterior foi integrado a dois Sistemas de Informações Geográficas: ArcView [ESRI, 1996] e SPRING [SPRING, 1998]. Tais integrações são descritas, sucintamente, a seguir.

3.1. Integração ao ArcView

O algoritmo para a solução do problema das p-medianas foi implementado através de dois programas escritos em linguagem C e compilados com MS Visual C++:

DMatrix:

Este programa utiliza como entrada de dados o arquivo pmedian.txt gerado por um script escrito na linguagem Avenue, disponível no ArcView, e contém no seu primeiro registro o número de pontos (nós) e o número de medianas a serem consideradas. Os registros seguintes formam uma lista de coordenadas X-Y de todos os pontos considerados. Este programa gera um arquivo de saída (pmedian.dat) contendo a matriz de distâncias entre os pontos considerados.

PMedian:

Este programa utiliza como entrada de dados o arquivo pmedian.dat e gera como saída o arquivo solução.txt, contendo uma lista de triplas formadas por: nó de demanda, sua mediana correspondente e a distância entre eles. Para finalizar, o arquivo contém um número que indica o status da solução encontrada: "Ótima" (gap fechado por limites) ou "Não-Ótima".

No programa DMatrix, a distância entre os pontos foi calculada a partir da escala do mapa no qual estão inseridos os pontos considerados e os valores resultantes representam a distância direta euclidiana entre os pontos, não levando em conta os arcos (ruas e avenidas) que compõem o mapa. Neste modelo de solução do problema das p-medianas, a distância entre os pontos foi o único parâmetro de custo considerado.

Para a visualização da solução, utilizou-se a função Spider, disponível no ArcView, que foi modificada para se adequar às necessidades da integração. Esta função verifica as distâncias entre os pontos de demanda, contidos em um tema, e os pontos relativos aos centros ofertantes, contidos em outro tema, e faz a ligação dos pontos de demanda aos centros mais próximos.

As Figuras 2 e 3 a seguir mostram alguns resultados obtidos utilizando dados do centro da cidade de São José dos Campos, SP. Os polígonos de fundo correspondem às quadras do centro da cidade (correspondentes ao tema CentroSJC.shp). Os pontos sobrepostos são os nós de demanda considerados (os quais correspondem ao tema P_demanda.shp).

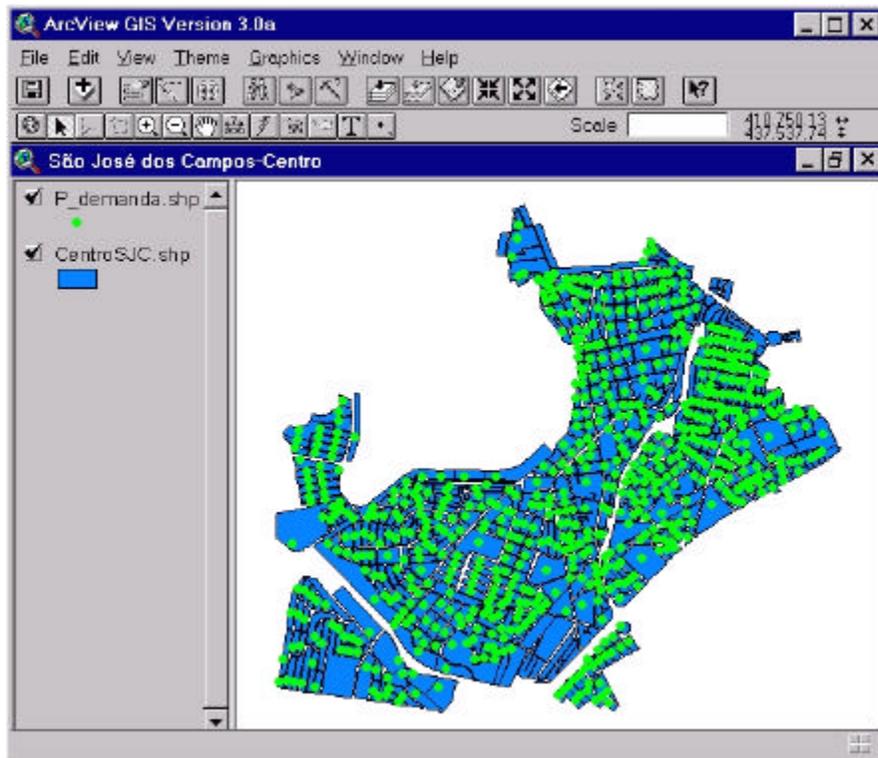


Figura 2: Pontos de demanda no ArcView.

As medianas encontradas pelo algoritmo integrado são representadas por pontos associados ao tema Medianas.shp e as alocações dos pontos de demanda a suas medianas mais próximas correspondem ao tema Solução.shp, conforme ilustrado pela figura a seguir.

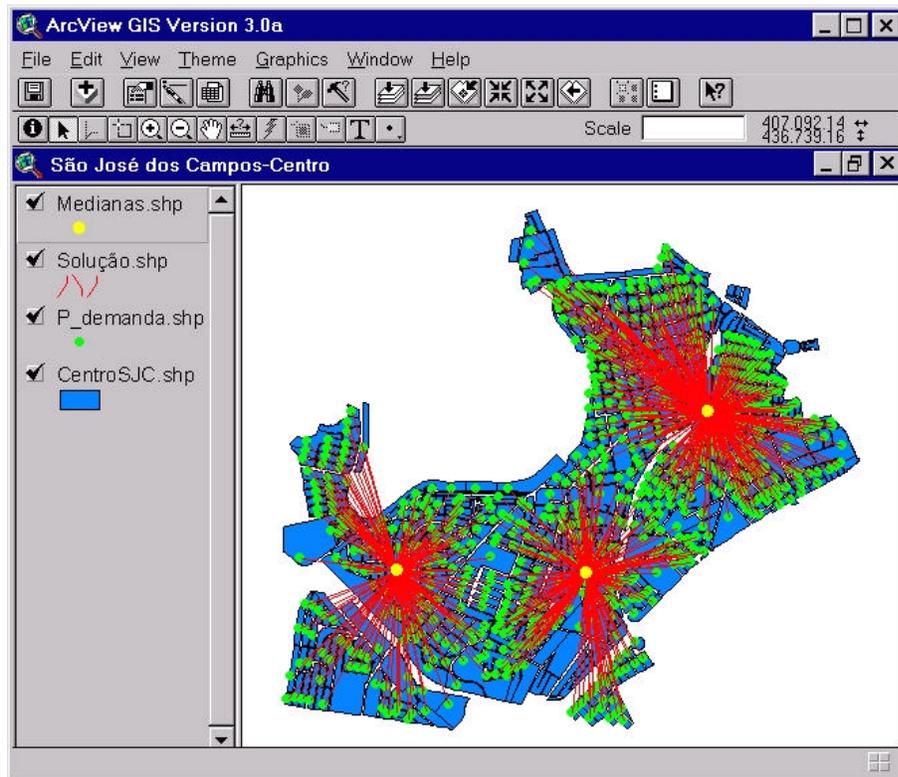


Figura 3: Visualização da solução de problema de 3-medianas.

3.2. Integração ao SPRING

O Sistema de Processamento de Informações Georeferenciadas [SPRING, 1998] é um sistema computacional desenvolvido pela equipe da Divisão de Processamento de Imagens (DPI) do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. Este sistema objetiva a integração e análise de diferentes tipos de dados espaciais. O modelo de dados do SPRING está baseado no paradigma de orientação a objetos [Câmara, 1995]. Um banco de dados geográfico é composto de planos de informação, de objetos geográficos, e de informações não espaciais. Os planos de informação podem representar informações contínuas no espaço (campos), ou os objetos geográficos individuais. Cada plano de informação pode conter representações espaciais do tipo vetorial ou varredura. A representação vetorial corresponde a linhas, pontos, e polígonos que definem as formas de representação dos objetos espaciais, enquanto a representação de varredura corresponde a uma matriz de pontos com valores em cada célula. Os tipos de dados tratados no SPRING são:

- Mapas temáticos: cada informação representa um tema ou classe de informação. Por exemplo as classes de uso do solo de uma região.
- Mapas cadastrais ou mapa de objetos: ao contrário de um mapa temático, cada elemento é um *objeto geográfico*, que possui atributos e que pode estar associado a várias representações gráficas. Por exemplo, os lotes de uma cidade são elementos do espaço geográfico que possuem atributos (dono, localização, valor venal, IPTU devido, etc.) e que podem ter representações gráficas diferentes (poligonais, lineares, ou pontuais) em mapas de escalas distintas.
- Mapas de redes: correspondem a mapas cadastrais, com a diferença de que geralmente os objetos são representados por elementos lineares ou pontuais. As representações pontuais devem estar localizadas em pontos de intersecção de linhas na rede.

- Modelo numérico de terreno: denota a representação de uma grandeza que varia continuamente no espaço. Comumente associados à altimetria, podem ser utilizados para modelar outros fenômenos de variação contínua (como variáveis geofísicas, geoquímicas e batimetria).
- Imagens: representam dados de sensoriamento remoto ou fotografias aéreas.

O algoritmo para localização das medianas pode ser aplicado no SPRING em dados dos modelos temático, cadastral e de redes, da forma descrita a seguir:

- Para uso em um dado temático é necessário que a representação vetorial contenha pontos. As localizações espaciais dos pontos e a distância linear entre os mesmos são utilizados no processo de localização das medianas.
- Para o dado cadastral o procedimento de localização das medianas atua sobre uma determinada categoria de objetos selecionada. Todos os objetos desta categoria que estejam associados a uma representação pontual são utilizados na análise de localização, que usa a distância linear entre os pontos.
- Para o modelo de redes o modo de utilização é similar ao do modelo cadastral, com a diferença de que a distância entre os pontos pode ser escolhida entre linear, ou ser computada a partir da própria rede.

A Figura 4 mostra a interface para execução da função de localização de medianas no SPRING. O cálculo das medianas usa a área da informação que está visível no monitor. A partir de um plano de informação ativo, o usuário define o número de medianas a serem calculadas. Se o plano ativo corresponder a um dado temático esta é a única informação necessária a ser fornecida, sendo considerada a distância linear entre os pontos. Para o caso de dados cadastrais ou de redes, a lista de categorias de objeto fica ativa para que seja selecionado um tipo de objeto. A princípio apenas objetos do mesmo tipo entram na análise de localização, podendo esta restrição não existir em versões futuras. O cálculo da distância entre os pontos corresponde à distância linear para os modelos temático e cadastral, enquanto que para o modelo de redes também está disponível selecionar que a distância seja calculada baseada na própria rede. Nesta primeira versão, esta interface também apresenta a opção de se associar algum valor de demanda ou peso para os pontos em análise, embora ainda esteja inibida. Este valor poderá ser obtido a partir de um atributo no banco de dados.

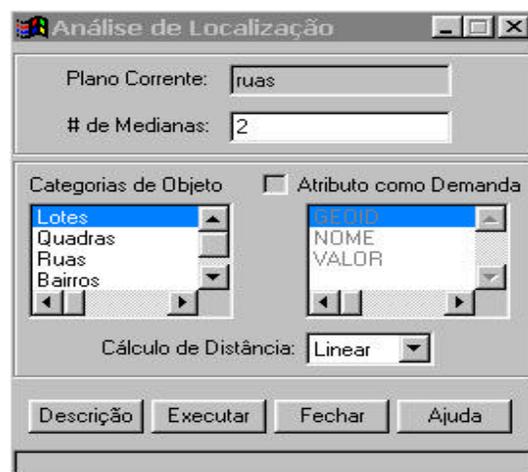


Figura 4: Interface de diálogo para localização de medianas no SPRING.

As Figuras 5 e 6 mostram os resultados da análise de localização em uma pequena região da cidade de São José dos Campos. Alguns objetos localizados em nós da rede correspondem à possíveis localizações para instalação de algum tipo de atividade. Dado o número de medianas

a se encontrar, o programa gera como resultado na tela, os pontos correspondentes às medianas (representados por círculos) e associa os outros pontos à mediana mais próxima. Pode-se observar que os resultados considerando as distâncias linear e da rede não necessariamente são iguais.

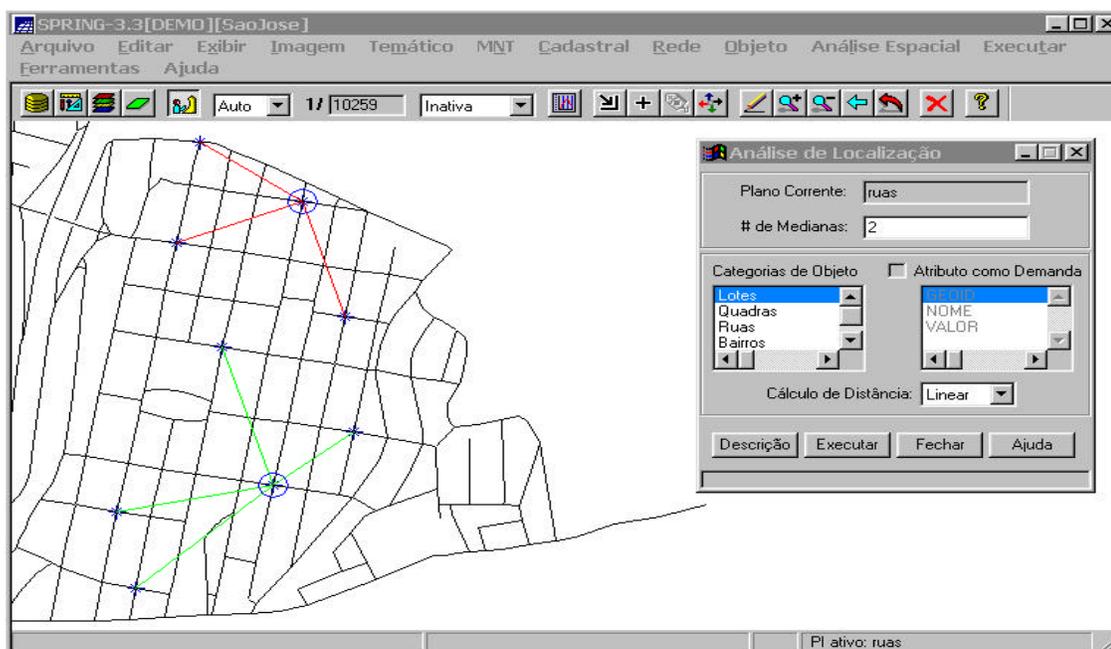


Figura 5: Cálculo de medianas no SPRING usando distância linear.

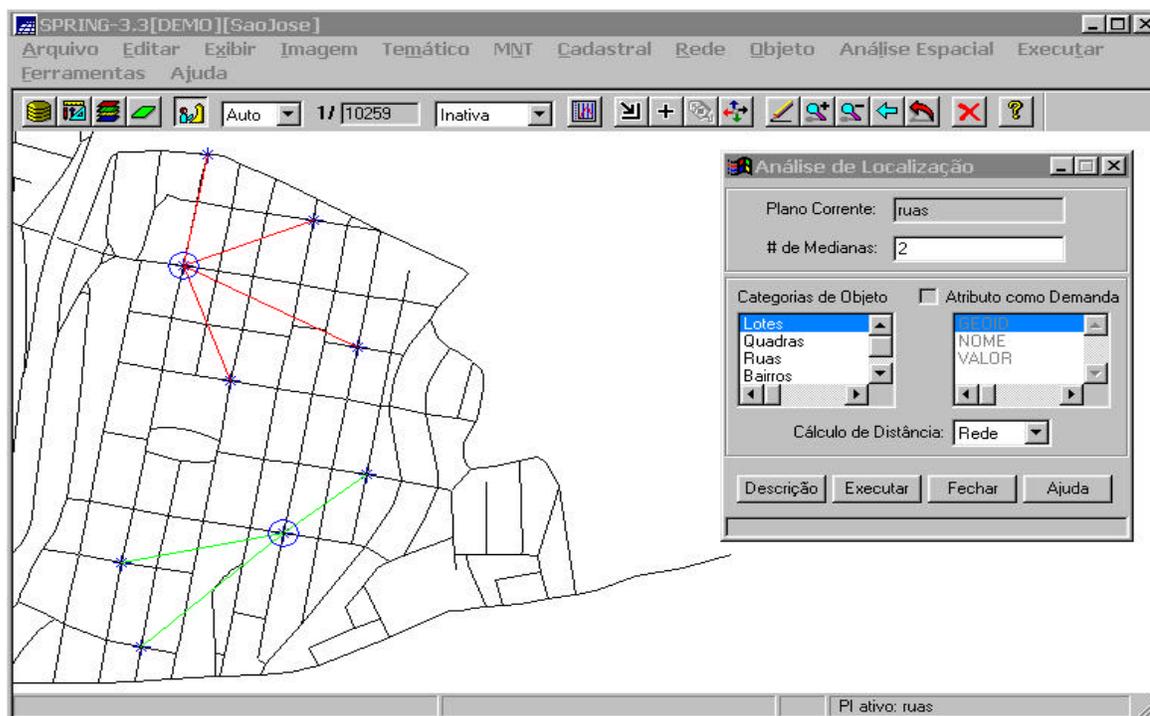


Figura 6: Cálculo de medianas no SPRING usando distâncias da própria rede.

4. Testes Computacionais e Resultados

Apresenta-se a seguir os resultados de alguns testes computacionais do algoritmo de p-medianas discutido na seção 2. Para os testes, foi utilizado um microcomputador MMX

233MHz com 128MB de RAM e foram utilizados dados correspondentes às quadras da região central da cidade de São José dos Campos. Os resultados dos testes estão apresentados na Tabela 1 a seguir. Nesta tabela, todos os tempos computacionais excluem o tempo necessário para estabelecer a matriz de distâncias. A tabela contém:

- n - número de nós da rede;
- p - número de medianas;
- LInf – valor da melhor solução dual obtida (limite inferior da solução ótima);
- LSup – valor da melhor solução viável obtida (limite superior da solução ótima);
- Gap – gap percentual de dualidade, ou seja, $100\% \times (LSup - LInf)/LSup$;
- Tempo - tempo computacional (em segundos).

Tabela 1 - Resultados dos Testes Computacionais

n	p	LInf	LSup	Gap	Tempo
324	5	122518,02	122518,02	0,000	4,72
	10	79250,84	79256,35	0,007	7,30
	20	54467,23	54533,11	0,121	7,33
	50	32094,13	32101,52	0,023	7,65
	108	18719,70	19683,61	4,897	7,84
818	5	604883,69	605855,81	0,160	102,66
	10	382420,75	385371,44	0,766	97,48
	20	251540,45	251717,77	0,070	60,39
	50	146303,64	149251,13	1,975	43,73
	100	97763,44	98992,31	1,241	57,93
	150	75465,67	77440,57	2,550	66,19
	272	47481,36	50086,61	5,201	85,58
3282	5	6381066,50	6381119,00	0,001	1699,88
	10	3911948,00	3914249,75	0,059	1548,43
	20	2342928,75	2350502,50	0,322	1520,00
	50	1288593,00	1308957,25	1,556	1106,45
	100	838007,63	841380,81	0,401	954,24
	500	322401,41	332954,84	3,170	1530,44
	1000	186532,23	194813,50	4,251	1606,07
	1141	164245,19	175905,27	6,629	1526,76

Pelos resultados mostrados na Tabela 1 pode-se perceber que os valores para os gaps de dualidade são pequenos, demonstrando a efetividade do algoritmo de p-medianas para dados reais distribuídos geograficamente. Os dados utilizados e os resultados obtidos estão disponíveis em <http://www.lac.inpe.br/~lorena/ArsigIndex.html>.

5. Conclusão

Modelos de localização de facilidades têm sido propostos, há algum tempo, como ferramentas de auxílio à decisão, principalmente quando uma base de dados geograficamente referenciada pode ser usada e Sistemas de Informações Geográficas podem ser utilizados para a análise desses dados.

Neste trabalho discutiu-se a integração de um modelo de p-medianas aos Sistemas de Informações Geográficas *ArcView*, da ESRI, e *SPRING*, em desenvolvimento no INPE. O código integrado a estes SIGs implementa uma abordagem recente da heurística Lagrangeana/surrogate que tem se mostrado eficiente em diversas classes de problemas de Otimização Combinatória.

Testes computacionais empreendidos usando dados do município de São José dos Campos demonstram a efetividade do algoritmo proposto para utilização em Sistemas de Apoio à Decisão usando Sistemas de Informações Geográficas.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da FAPESP - Fundação para o Amparo à Pesquisa no Estado de São Paulo (proc. 96/04585-6). O primeiro autor agradece também o apoio recebido do CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (proc. 350034/91-5).

Referências Bibliográficas

- Beasley, J.E. Lagrangean Heuristics for Location Problems, *European Journal of Operational Research*, 65: 383-399, 1993.
- Burrough, P.A. *Principles of Geographical Information Systems for Land Resources Assessment*, Clarendon Press, Oxford, 1986.
- Câmara, G. *Modelos, Linguagens e Arquiteturas para Bancos de Dados Geográficos*. Tese de Doutorado, INPE – São José dos Campos, SP, 1995.
- Christofides, N.; Beasley, J.E. A tree search algorithm for the p-median problems, *European Journal of Operational Research*, 10: 196-204, 1982.
- Cooper, L. Location-allocation problems. *Operations Research*, 11: 331-343, 1963.
- Daskin, M. *Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications*, Wiley Interscience, NY, 1995.
- Drezner, Z. (ed.) *Facility Location: A Survey of Applications and Methods*, Springer-Verlag, NY, 1995.
- Dyer, M.E. Calculating surrogate constraints, *Mathematical Programming*, 19: 255-278, 1980.
- ESRI - Environmental Systems Research Institute, Inc. *Avenue Customization and Application Development for ArcView*, Redlands, CA, 1996.
- Fischbeck, P. GIS: More than a Map. *OR/MS Today*, 42-45, Aug. 1994.
- Galvão, R.D.; Raggi, L.A. A method for solving to optimality uncapacitated location problems, *Annals of Operations Research*, 18: 225-244, 1989.
- Garey, M.R.; Johnson, D.S. *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1979.
- Glover, F. Surrogate constraints, *Operations Research*, 16(4): 741-749, 1968.
- Hakimi, S.L. Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems, *Operations Research*, 13: 462-475, 1965.
- Hakimi, S.L. Optimum location of switching centers and the absolute centers and the medians of a graph, *Operations Research*, 12: 450-459, 1964.
- Handler, G.; Zang, I. A dual algorithm for the constrained shortest path problem, *Networks*, 10: 293-310, 1980.

- Held, M.; Karp, R.M. The traveling-salesman problem and minimum spanning trees: part II, *Mathematical Programming*, 1: 6-25, 1971.
- Jarvinen, P.J.; Rajala, J. A branch and bound algorithm for seeking the p-median, *Operations Research*, 20: 173-178, 1972.
- Karwan, M.L.; Rardin, R.L. Some relationships between Lagrangean and surrogate duality in integer programming, *Mathematical Programming*, 17: 320-334, 1979.
- Lorena, L.A.N.; Lopes, F.B. A surrogate heuristic for set covering problems. *European Journal of Operational Research*, 79: 138-150, 1994.
- Lorena, L.A.N.; Narciso, M.G. Relaxation Heuristics for Generalized Assignment Problems. *European Journal of Operational Research*, 91: 600-610, 1996.
- Lorena, L.A.N.; Senne, E.L.F. A Lagrangean/Surrogate Heuristic for Uncapacitated Facility Location Problems. In: *Latin-Iberian-American Congress on Operations Research and System Engineering, 8 / Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 28*. Rio de Janeiro, RJ, Ago. 1996. Anais, p. 854-859 (Vol. 2).
- Lorena, L.A.N.; Senne, E.L.F. Improving traditional subgradient scheme for Lagrangean relaxation: an application to location problems, *International Journal of Mathematical Algorithms*, 1999 (to appear).
- Minoux, M. Plus courts chemins avec contraintes: Algorithmes et applications, *Annals of Telecommunications*, 30: 383-394, 1975.
- Narciso, M.G.; Lorena, L.A.N. Lagrangean/surrogate relaxation for generalized assignment problems, *European Journal of Operational Research*, 114 (1): 165-177, 1999.
- Neebe, A.W. A branch and bound algorithm for the p-median transportation problem, *Journal of the Operational Research Society*, 29: 989-995, 1978.
- Parker, R.G.; Rardin, R.L. *Discrete Optimization*, Academic Press, New York, 1988.
- Senne, E.L.F.; Lorena, L.A.N. Lagrangean/Surrogate Heuristics for p-Median Problems. Submetido para publicação no *7th ICS Conference Volume*, Cancun, México, 1999. (disponível em <http://www.lac.inpe.br/~lorena/pmed99.pdf>).
- Senne, E.L.F.; Lorena, L.A.N. Lagrangean/Surrogate Heuristics for Facility Location Problems. In: *EURO XV - INFORMS XXXIV Joint International Meeting*. Barcelona, Espanha, Jul. 1997. Abstracts, p. 128.
- SPRING - *Sistema de Processamento de Informações Georeferenciadas*, INPE, São José dos Campos, SP, <http://www.dpi.inpe.br/spring>, 1998.
- Taillard, E.D. *Heuristic methods for large centroid clustering problems*, Technical report IDSIA96-96, IDSIA, 1996.
- Teitz, M.B.; Bart, P. Heuristic Methods for Estimating the Generalized Vertex Median of a Weighted Graph, *Operations Research*, 16: 955-961, 1968.