Transformada de Laplace & EDO .

Margarete Oliveira Domingues

PGMET/INPE

Transformada de Laplace

Integrais impróprias

Se $f(x)$ é definida para $a \leq x \leq \infty$, sendo a=cte, então a integral imprópria

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{R\to} \int_0^R f(x)dx$$

se o limite existe.

- Qdo. existe o limite a integral imprópria é dita convergente
- Qdo. não existe o limite a integral imprópria é dita divergente

Exercício:

Determine se as integrais impróprias a seguir convergem

1. $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}, x \neq 0$
2. $\int_9^\infty \frac{1}{x}, x \neq 0$
3. $\int_5^\infty x^{-\frac{3}{2}}, x \neq 0$
4. $\int_1^\infty x^{-\frac{1}{2}}, x \neq 0$

Transformada de Laplace ($\mathcal{L}$)

Seja $f(x)$ definida em $0 \leq x \leq \infty$ e seja s uma variável real arbitrária a Transformada de Laplace de $f(x)$ é

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$$

$\forall s$ que torne essa integral convergente

Condições de existência da $\mathcal{L}\{f(x)\}$

- Nem todas as $f(x)$ admitem a $\mathcal{L}\{f(x)\}$
- Definições:
  - $f(x)$ ser de ordem exponencial α, i.e., , existe ctes. α, M e x_0 tais que $e^{-\alpha x}|f(x)| \leq M, \forall x \leq x_0$
  - $f(x)$ ser contínua por partes em $]a, b[$ e existir os limites laterais
- Assegurar a convergência da integral imprópria:
  Teorema: Se $f(x)$ é contínua por partes em todo intervalo finito $[a, b]$,$b > 0$ e $f(x)$ de ordem exponencial α, então a $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ existe para $s > \alpha$

Exercício:

Determine a $\mathcal{L}\{f(x)\}$ para as seguintes funções:

1. $f(x) = 1$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = e^{\alpha x}$
4. $f(x) = \operatorname{sen}(\alpha x)$
5. $f(x) = x$
6. $f(x) = xe^{\alpha x}$
7. $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$
8. $f(x) = x\operatorname{sen}(x)$

Definição:

Uma função $f(x) \in E_\alpha$ se

1. $f(x)$ é definida $[a, \infty[$
2. $f(x)$ é contínua por partes $[a, b[, b > 0$
3. $f(x)$ é de ordem exponencial α

Propriedades $\mathcal{L}\{f(x)\}$

- Linearidade

$$\mathcal{L}\{a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)\} = a_1 \mathcal{L}\{f_1(x)\} + a_2 \mathcal{L}\{f_2(x)\}$$

- Translação

$$\mathcal{L}\{e^{ax} f(x)\} = F(s-a), \qquad (s > a + \alpha)$$

- $\mathcal{L}\{x^n f(x)\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}[F(s)],$

  Exemplo:

  - $n = 1: \qquad \mathcal{L}\{x f(x)\} = -\frac{d}{ds}[F(s)] = -F'(s)$
  - $n = 2: \qquad \mathcal{L}\{x^2 f(x)\} = F''(s)$

Propriedades $\mathcal{L}\{f(x)\}$

- Se $f(x)$ for uma função periódica, i.e., $f(x) = f(x+T)$,

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{\int_0^T e^{-sx} f(x)dx}{1 - e^{-Ts}}.$$

- Se $f(x) \in E_\alpha$ e se $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}, x > 0$ existe, então,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\} = \int_s^\infty F(t)dt$$

- Se $f(x) \in E_\alpha$,então,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

Exercícios

Calcule as seguintes Transformadas de Laplace

1. $\mathcal{L}\{\frac{\text{sen}(3x)}{x}\}$
2. $\mathcal{L}\{e^{4x}x\int_0^x \frac{1}{t}e^{-4t}\text{sen}(3t)dt\}$
3. $\mathcal{L}\{t\text{sen}(t)dt\}$
4. $\mathcal{L}\{2x^2 cosx\}$

Transformada inversa de Laplace

Definição

A $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ é a função $f(x)$ tal que

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$$

- Uma dada $F(s)$ pode ter várias, uma ou nenhuma Transformada de Laplace inversa.
- Se existe $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ contínua, então $f(x)$ é a única transformada inversa contínua de $F(s)$.
- Linearidade:
  $\mathcal{L}^{-1}\{a_1F_1(s) + a_2F_2(s)\} = a_1\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}a_2\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$

Métodos de Cálculo

- Método das frações parciais
- Complemento do quadrado:
  Todo polinômio quadrático em s,

$$as^2 + bs + c$$

pode ser posto sob a forma

$$a(s+k)^2 = h^2$$

em que

$$k = \frac{b}{2a} \qquad h = \sqrt{c - \frac{b^2}{4a^2}}$$

Exercícios

Calcule as seguintes Transformadas inversas de Laplace

1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}\right\}$

2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+3}{(s+1)(s-2)}\right\}$

3. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2-2s+9)}\right\}$

4. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+4}{(s^2+4s+8)}\right\}$

5. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{8}{s^3(s^2-s-2)}\right\}$

Aplicações a EDO

EDO lineares, com coef. ctes.

Protótipo:

$$b_n \frac{d^n y}{dx^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{dy}{dx} + b_0 y = g(x)$$

com condições iniciais:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_0 \\ y'(0) &= c1 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(0) &= c_{n-1} \end{aligned}$$

Transformada de Laplace de derivadas

Notação: $\mathcal{L}\{y(x)\} = Y(s)$

<u>Teorema:</u>
Se $y(x)$ e suas $n-1$ primeiras derivadas são contínuas, para $x \geq 0$ e são de ordem exponencial α e se $\dfrac{d^n y}{dx^n} \in E_\alpha$,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dx^n}\right\} = s^n Y(s) - s^{(n-1)} y(0) - s^{(n-2)} y'(0) - \cdots - s y^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

Em particular,

- n=1: $\mathcal{L}\{y'(x)\} = sY(s) - c_0$
- n=2: $\mathcal{L}\{y''(x)\} = s^2 Y(s) - c_0 s - c_1$

Solução de problemas de valor inicial

Idéia: Usar a Transformada de Laplace para resolver problemas de valor inicial de uma só vez

Solução de problemas de valor inicial

Idéia: Usar a Transformada de Laplace para resolver problemas de valor inicial de uma só vez

- Exemplo: (Caso homogêneo)
  Para resolver a $y' - 5y = 0, \quad y(0) = 2$, aplica–se a Transformada de Laplace e obtém–se

$$\mathcal{L}\{y'\} - 5\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\},$$

então como $c_0 = 2$, tem-se que

$$sY(s) - 2 - 5Y(s) = 0, \qquad \text{em que} \quad Y(s) = \frac{2}{s-5}$$

Logo, $y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-5}\} = 2e^{5x}$.

Solução de problemas de valor inicial

- Exemplo: (Caso não homogêneo)
  Para resolver a $y' - 5y = e^{5x}, \quad y(0) = 0$, aplica–se a Transformada de Laplace e obtém–se

$$\mathcal{L}\{y'\} - 5\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{5x}\},$$

então como $c_0 = 0$, tem-se que

$$sY(s) - 5Y(s) = \frac{1}{(s-5)}, \qquad \text{em que} \quad Y(s) = \frac{1}{(s-5)^2}$$

Logo, $y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-5)^2}\} = xe^{5x}$.

Solução de problemas de valor inicial

Idéia: E qdo. as soluções não são dadas em $x = 0$?

- Exemplo: Para resolver a $y' - 5y = 0, \quad y(\pi) = 2,$ aplica–se a Transformada de Laplace e obtém–se

$$\mathcal{L}\{y'\} - 5\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\},$$

então como c_0, é desconhecido e tem-se que

$$sY(s) - 2 - 5Y(s) = 0, \qquad \text{em que} \quad Y(s) = \frac{c_0}{s-5}$$

Logo, $y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = c_0\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-5}\} = c_0 e^{5x}$.
Entretanto, como $y(\pi) = 2, 2 = c_0 e^{5x} \to c_0 = 2e^{-5\pi}$ e assim $y(x) = 2e^{-5pi}e^{5x}$.

Solução de problemas de valor inicial

- Exemplo: Para resolver a $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 2$, aplica–se a Transformada de Laplace e obtém–se

$$\mathcal{L}\{y''\} - 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\},$$

então como $c_0 = 2, c_1 = 2$, tem-se que

$$s^2Y(s) - 2s - 2 + 4Y(s) = 0, \quad Y(s) = \frac{2s}{(s^2+4)} + \frac{2}{(s^2+4)}$$

Logo, $y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{(s^2+4)} + \frac{2}{(s^2+4)}\} =$ $2\cos(2x) + \operatorname{sen}(2x)$

Exercícios

Resolva as seguintes EDO por meio do método da Transformada de Laplace

- $y'' - y' - 2y = 4x^2; y(0) = 1, y'(0) = 4$
- $y'' + 4y' + 8y = \text{sen}(x); y(0) = 1, y'(0) = 0$
- $y''' - y' = e^x; y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0$

Dica: use o método de frações parciais

Resolução de sistemas de EDO

Sistemas de EDO

Seja $y = y(x)$, $z = z(x)$ no sistema de EDO

$$y' + z = x$$
$$z' + 4y = 0$$

com as condições iniciais

$$y(0) = 1, \quad z(0) = -1$$

Usando a notação $\mathcal{L}\{y(x)\} = Y(s)$ e $\mathcal{L}\{z(x)\} = Z(s)$ pode–se reescrever o sistema

$$[sY(s) - 1] + Z(s) = \frac{1}{s^2}$$
$$[sZ(s) + 1] + 4Y(s) = 0$$

Arrumando os termos

$$Y(s) + Z(s) = \frac{s^2+1}{s^2}$$
$$4Y(s) + sZ(s) = -1$$

Logo,

$$Y(s) = \frac{s^2+s+1}{s(s^2-4)}, \qquad Z(s) = \frac{s^3+4s^2+4}{s(s^2-4)}$$

Aplicando o método das frações parciais e tomando a Transformada inversa de Laplace

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{-\frac{1}{4s} + \frac{7}{8(s-2)} + \frac{3}{8(s+2)}\}$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}e^{2x} + \frac{3}{4}e^{-2x}$$

$$z(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Z(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2} - \frac{7}{4(s-2)} + \frac{3}{4(s+2)}\}$$

$$= x + \frac{7}{4}e^{2x} + \frac{3}{4}e^{-2x}$$

Exercícios

Resolva os seguintes sistemas de EDO em que $w = w(x), y = y(x)$ e $z = z(x)$ utilizando o método da Transformada de Laplace.

$$w' + y = \operatorname{sen}(x)$$
$$y' - z = e^x$$
$$z' + w + y = 1$$

em que as condições iniciais são $w(0) = 0, y(0) = 1, z(0) = 1$

Exercícios

Resolva os seguintes sistemas de EDO em que $w = w(x), y = y(x)$ e $z = z(x)$ utilizando o método da Transformada de Laplace.

$$
\begin{aligned}
w'' + y + z &= -1 \\
w + y'' - z &= 0 \\
-w' - y' + z'' &= 0
\end{aligned}
$$

em que as condições iniciais são $w(0) = 0, w'(0) = 1, y(0) = 0, y'(0) = 0, z(0) = -1, z'(0) = 1.$

Fim do Tomo