Derivadas Parciais & Aplicações

Margarete Oliveira Domingues

PGMET/INPE

Derivadas e Integrais de Quantidades vetoriais

- √ Todas as regras aprendidas na derivação e integração de quantidades escalares são válidas na derivação e integração de quantidades vetoriais.
- √ Uma derivada ou integral de uma quantidade vetorial é definida pela aplicação desse ente matemático nas componentes do vetor a ser operado.

Diferenciação em Sinal de Integral

$$\phi(y) = \int_{u_1(y)}^{u_2(y)} f(x,y)dx$$

$a \leq y \leq b$. Então:

$$\frac{d\phi}{dy} = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial f}{\partial y}dx + f(u_2,y)\frac{du_2}{dy} - f(u_1,y)\frac{du_1}{dy}$$

Essa é a **Regra de Leibnitz**. No caso de u_1 e u_2 serem constantes, os dois últimos termos são nulos.

Pontos de Máximo e Mínimo de uma $f(x,y)$

Condição necessária

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Se (x_0, y_0) é um ponto que satisfaz essa cond. , então ele é chamado de **ponto crítico**.

Pontos de Máx. e Mín. de uma $f(x,y)$

$$\triangle = \{(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}) - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2\}\Big|_{(x_0,y_0)}$$

1. (x_0, y_0) é um ponto de máximo relativo se $\triangle > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(x_0,y_0)} < 0$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}|_{(x_0,y_0)} < 0$.
2. (x_0, y_0) é um ponto de mínimo relativo se $\triangle > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(x_0,y_0)} > 0$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}|_{(x_0,y_0)} > 0$.
3. (x_0, y_0) não é nem ponto de máximo nem ponto de mínimo relativo se $\triangle < 0$. Neste caso, (x_0, y_0) é chamado *saddle point* ou "ponto de cela".
4. Nenhuma informação pode ser obtida se $\triangle = 0$.

Exercicios

Encontre:

1. $\phi'(y)$ se $\phi(y) = \int_{y^2}^{1-y} \left(\frac{cos(yx)}{x} \right) dx$.
2. os pontos de máximo e mínimo relativos de $f(x, y) = 2x^3 + 3y^3 - 6x - 81y + 500$, e os valores de $f(x, y)$ nestes pontos.

Aplicações em Geometria

Derivadas Direcionais

- $F(x, y, z)$ def. num ponto (x, y, z) de uma dada curva C.
- ds um comprimento de arco infinitesimal da curva
- a derivada direcional de F no ponto (x, y, z) ao longo da curva C é def.:

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

Derivadas Direcionais, forma vetorial

$$\frac{dF}{ds} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}\right)$$

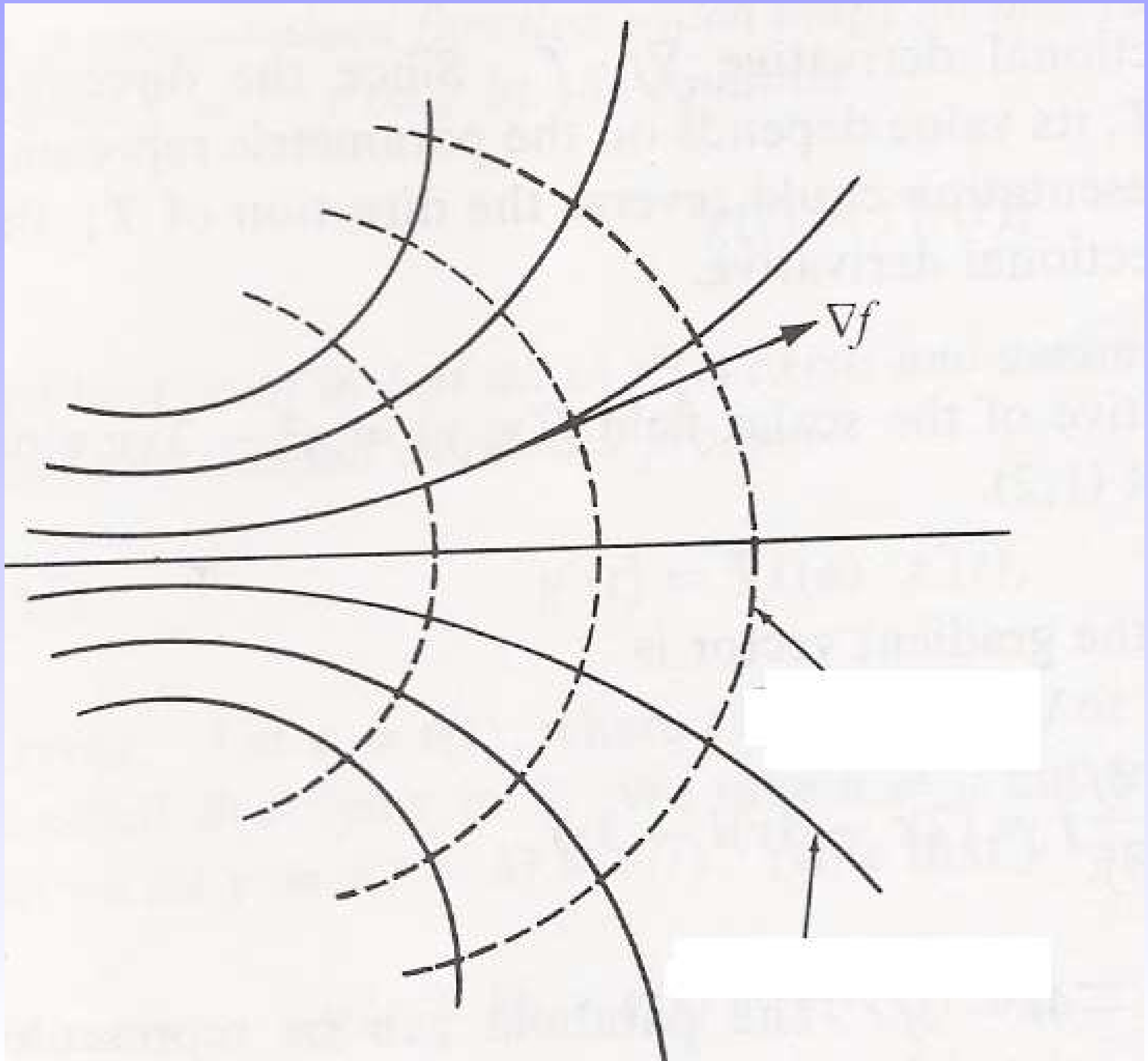
$$= \nabla F \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla F \cdot \mathbf{T}$$

a derivada direcional é dada pelo componente do ∇F na direção da tangente de C.

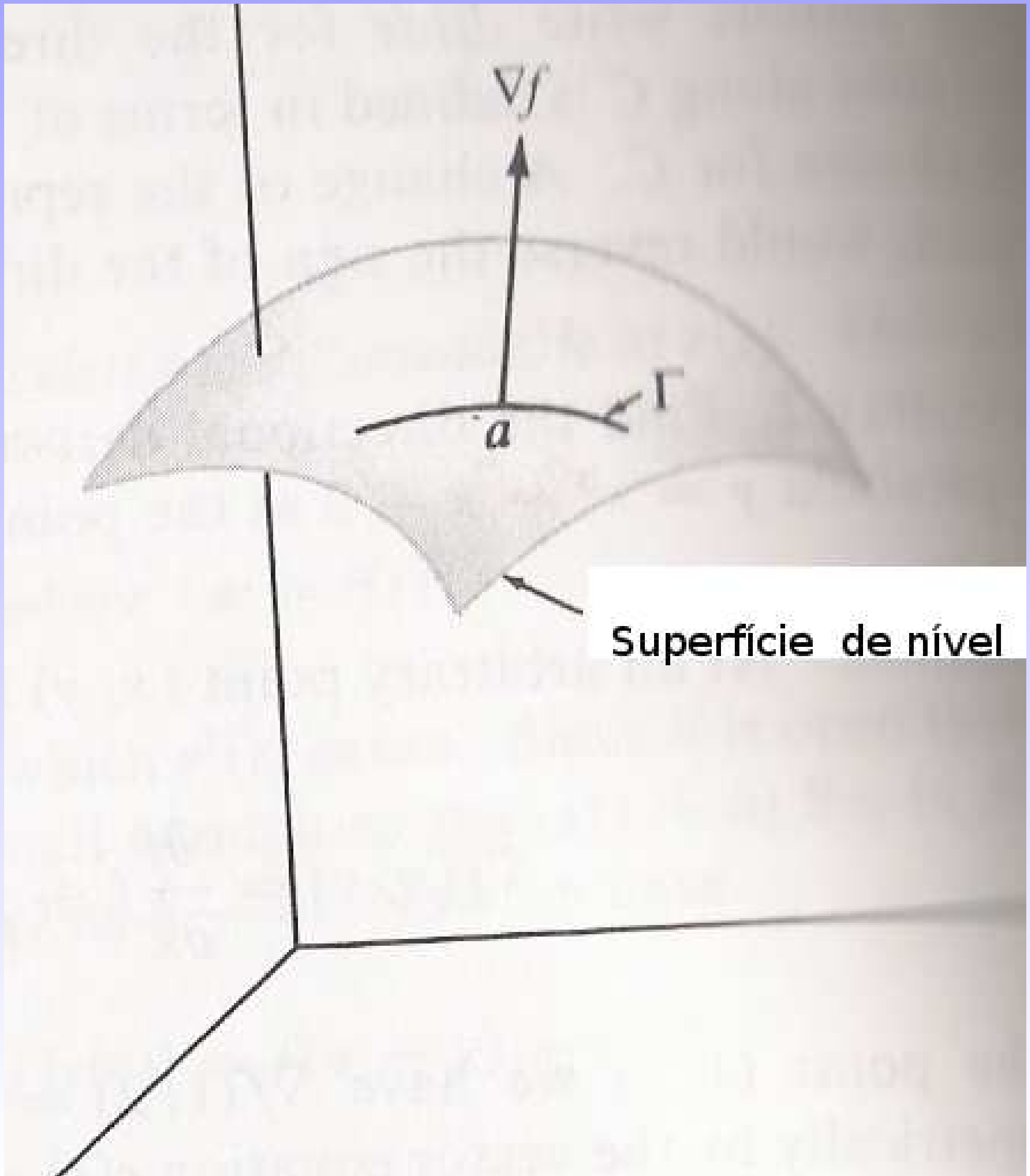
Derivadas Direcionais

- o vetor $\mathbf{T}$ é um vetor unitário uma vez que este é a derivada do vetor posição **r** em relação ao comprimento de arco da curva.
- caso se disponha de um vetor tangente não-unitário, deve-se dividí-lo pelo seu módulo a fim de torná-lo unitário.
- O máximo valor da derivada direcional é $|\nabla F|$, e ocorre qdo ∇F aponta na mesma direção e sentido que o vetor tangente $\mathbf{T}$.
- $|\nabla F|$ são chamadas superfícies equipotenciais ou isosuperfícies.

Exemplos

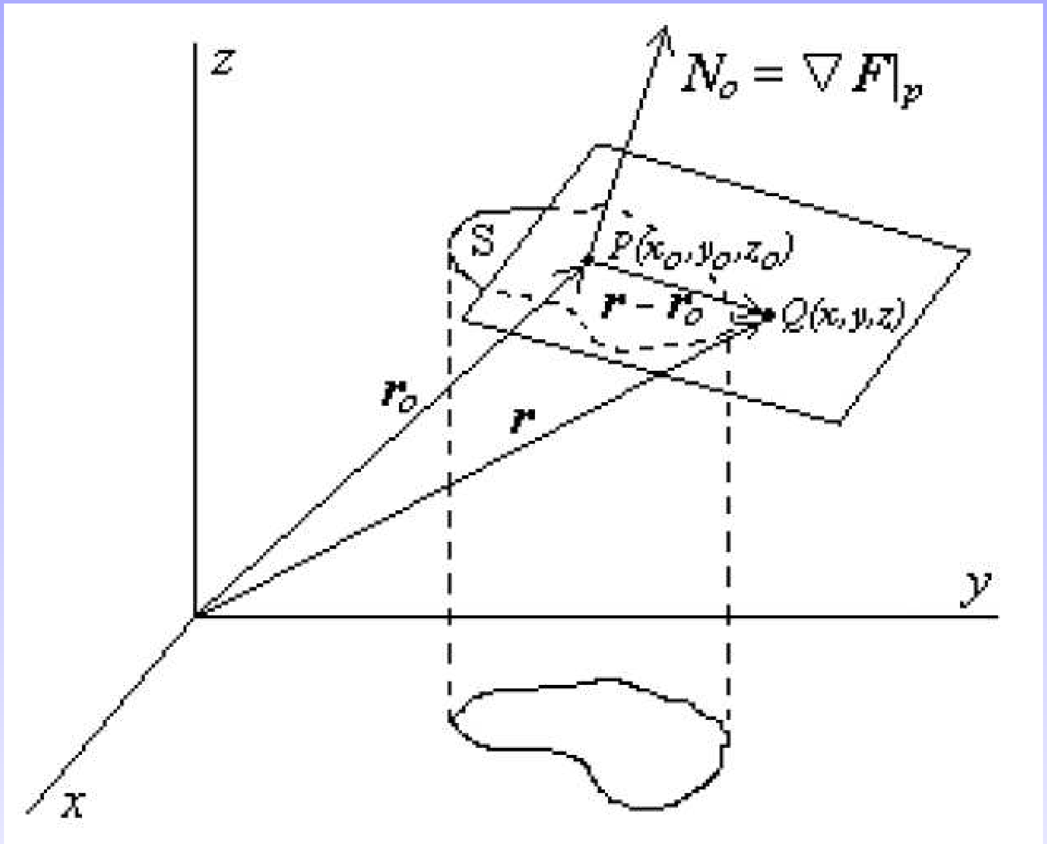


Exemplos



Plano Tangente a uma Superfície

Seja a superfície S definida pela função $F(x, y, z) = c$.



Um vetor normal a S em um ponto P, é o $\nabla F|_P$

$$\mathbf{N_0} = \nabla F|_P$$

Plano Tangente a uma Superfície

- $\nabla F|_P$ é também normal a um plano que é tangente à superfície S, no ponto P.
- $\mathbf{r_0}$ é o vetor posição, em relação à origem, do ponto $P(x_0, y_0, z_0)$,
- $\mathbf{r}$ é o vetor posição de um ponto qualquer sobre o plano, $Q(x, y, z)$,

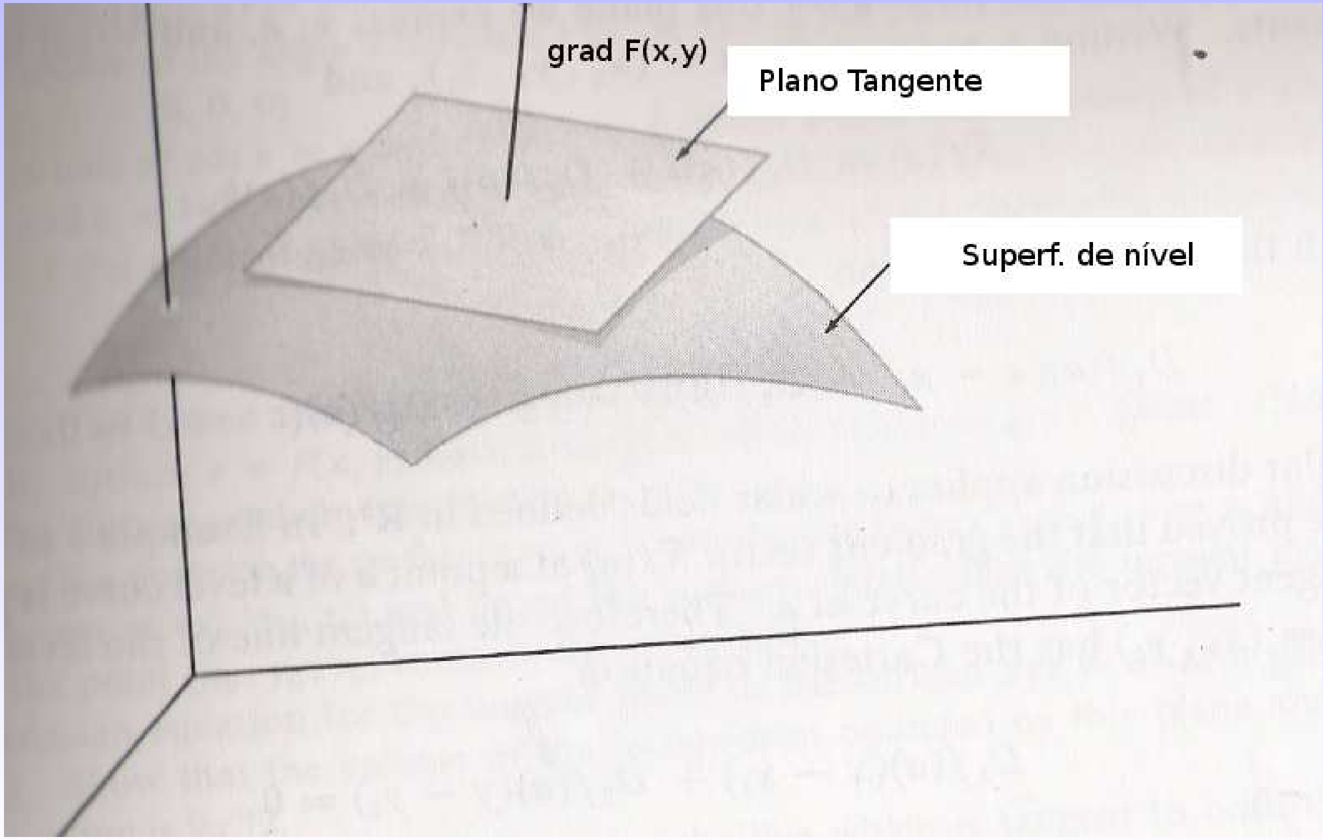
Eq. Plano Tangente a uma Superfície

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}) \cdot \mathbf{N_0} = (\mathbf{r} - \mathbf{r_0}) \cdot \nabla F|_P = 0$$

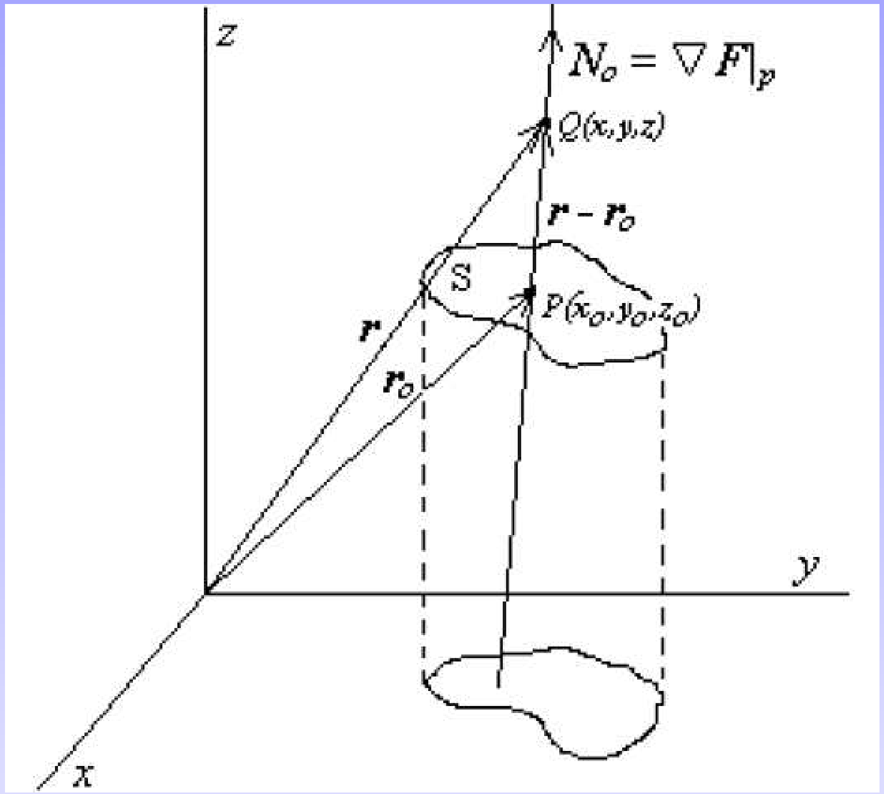
pois $\mathbf{r} - \mathbf{r_0}$ é perpendicular a $\mathbf{N_0}$.

Plano tangente, em coordenadas retangulares

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_P (x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_P (y - y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_P (z - z_0) = 0$$



Reta Normal a uma Superfície



$Q(x, y, z)$ localizado na mesma reta da normal à superfície S no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{N_0}$, $\mathbf{r} - \mathbf{r_0}$ é colinear a $\mathbf{N_0}$

Eq. da Reta Normal a uma Superfície

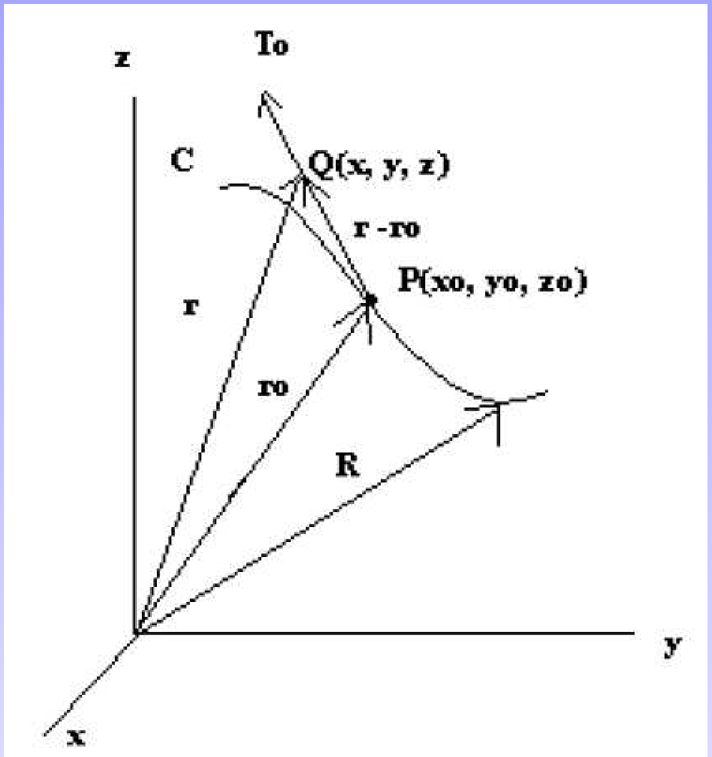
$$(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}) \times \mathbf{N_0} = (\mathbf{r} - \mathbf{r_0}) \times \nabla F|_P = 0$$

Reta Normal a uma Superfície, coordenadas retangulares

$$\frac{(x - x_0)}{\left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_P} = \frac{(y - y_0)}{\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_P} = \frac{(z - z_0)}{\left.\dfrac{\partial F}{\partial z}\right|_P}$$

Igualando cada um destes termos a um parâmetro (como t ou u) e isolando x, y e z, são obtidas as equações paramétricas da reta normal.

Reta Tangente a uma Curva



Uma curva C def. pelas eq. paramétricas
$x = f(u)$,$y = g(u)$ e $z = h(u)$
cada ponto da curva pode ser definido por um vetor
$\mathbf{R} = f(u)\mathbf{i} + g(u)\mathbf{j} + h(u)\mathbf{k}$,

Reta Tangente a uma Curva

Um vetor tangente a C num ponto P, $u = u_0$, é definido

$$\mathbf{T_0} = \left.\frac{d\mathbf{R}}{du}\right|_P$$

$\mathbf{r_0}$ e $\mathbf{r}$ são vetores posição de $P(x_0, y_0, z_0$ e $Q(x, y, z)$, em relação à origem,

Reta Tangente a uma Curva

Q um ponto sobre a linha tangente em P, então o vetor $(\mathbf{r} - \mathbf{r_0})$ é colinear ao vetor $\mathbf{T_0}$, e assim:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}) \times \mathbf{T_0} = (\mathbf{r} - \mathbf{r_0}) \times \nabla \frac{d\mathbf{R}}{du}\bigg|_P = \mathbf{0}$$

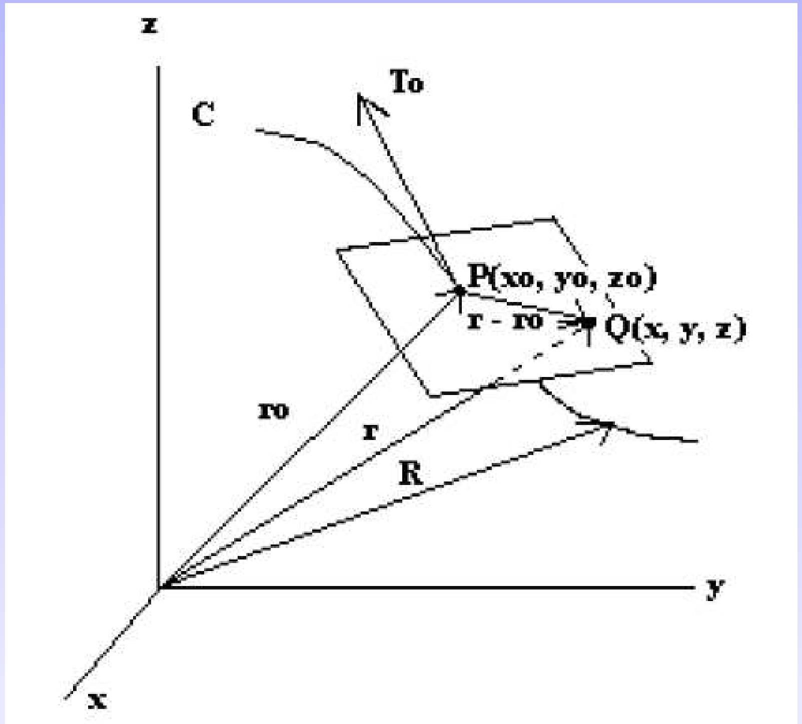
A reta tangente pode ser obtida pelas seguintes relações:

$$\frac{x - x_0}{f'(u_0)} = \frac{y - y_0}{g'(u_0)} = \frac{z - z_0}{h'(u_0)}$$

As equações paramétricas da reta podem ser obtidas igualando cada uma destas razões a u ou t.

Plano Normal a uma Curva

Dd um ponto $Q(x, y, z)$ sobre um plano que é normal à curva C, no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$, então o vetor $\mathbf{r} - \mathbf{r_0}$ é perpendicular ao vetor tangente $\mathbf{T_0}$.



Eq. do plano normal em coordenadas retangulares

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}) \cdot \mathbf{T_0} = (\mathbf{r} - \mathbf{r_0}) \cdot \nabla \left. \frac{d\mathbf{R}}{du} \right|_P = 0$$

$$f'(u_0)(x - x_0) + g'(u_0)(y - y_0) + h'(u_0)(z - z_0) = 0$$

Exercicios

Encontre:

1. a derivada direcional de $F = x^3y^2z - x^2z^2$ ao longo da curva $x = sen(u) - 2$, $y = u^2 - u$, $z = e^{-u} + 1$, no ponto P onde $u = 0$.
2. as eq. para o plano tangente e para a linha normal à superfície $xy^3z^2 + 3z^2 = 2xz - 14x^4z$, no ponto $(-1, 1, -1)$.
3. as eq. da linha tangente e do plano normal à curva $x = t^2 + 2$, $y = t^3 + t$, $z = 3t^2 + t$, no ponto onde $t = -2$.